

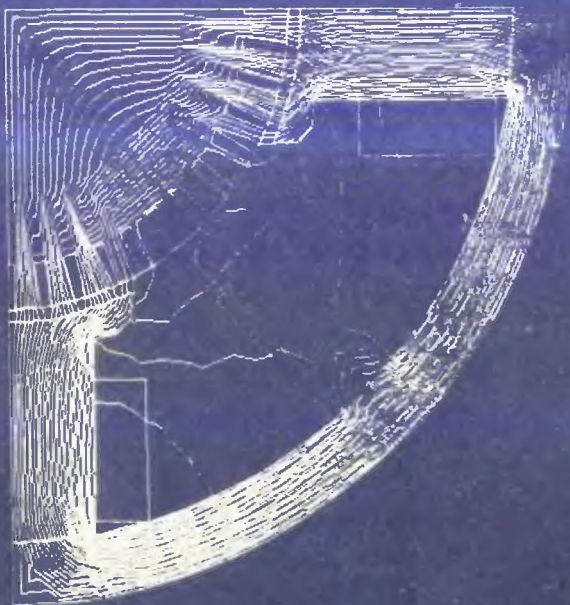
VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

П. Сильвестер
Р. Феррари

Метод

конечных элементов
для радиоинженеров
и инженеров-электриков



Метод конечных элементов

FINITE ELEMENTS
FOR ELECTRICAL
ENGINEERS

P. P. Silvester
R. L. Ferrari

Cambridge University Press
CAMBRIDGE
LONDON NEW YORK NEW ROCHELLE
MELBOURNE SYDNEY

П. Сильвестер
Р. Феррари

Метод конечных элементов

для радиоинженеров
и инженеров-
электриков

Перевод с английского
канд. техн. наук С. Н. Хотяинцева
под редакцией
канд. техн. наук Ф. Ф. Дубровки



Москва «Мир» 1986

Сильвестер П., Феррари Р.

С 36 Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 229 с., ил.

Книга известных зарубежных специалистов (Канада, Великобритания), в которой представлены математические и инженерные аспекты метода конечных элементов в решении задач электродинамики и электротехники. Рассматривается практическая реализация данного метода при решении конкретных инженерных задач.

Для радиоинженеров, инженеров-электриков, аспирантов и студентов инженерных электротехнических специальностей.

С 2302010000—328
041(01)—86 156—86, ч. 1

ББК 32.84 + 31.2

Редакция литературы по новой технике

© Cambridge University Press 1983.

This book was originally published in the English language by Cambridge University Press of Cambridge, England

© перевод на русский язык, «Мир», 1986,

Предисловие редактора перевода

Советскому читателю предлагается книга, посвященная применению метода конечных элементов для решения задач электромагнетизма. Она написана известными зарубежными специалистами в этой области П. П. Сильвестером (Канада) и Р. Л. Феррари (Великобритания) и является пока единственной в своем роде. Авторы ставили перед собой задачу обратить внимание радиоинженеров и инженеров-электриков на широкие возможности использования метода конечных элементов и обеспечить их руководством по практическому овладению этим мощным и эффективным средством решения задач математической физики.

Метод конечных элементов на сегодняшний день является общепризнанным основным методом структурного анализа в целом ряде областей науки и техники. Созданные на его основе комплексы программ для мощных ЭВМ широко используются в строительстве, кораблестроении, аэрокосмической и автомобильной промышленности, акустике, оптике, медико-биологических исследованиях, разведке полезных ископаемых и т. д. По своей сущности — это вариационный метод с кусочно-полиномиальными пробными функциями, обладающий большой геометрической гибкостью и применимый к широкому классу уравнений в частных производных. Он позволяет достаточно точно описать сложные криволинейные границы области определения решения и краевые условия. В отличие от метода конечных разностей метод конечных элементов обеспечивает единственность приближенного решения во всех точках рассматриваемой области и является значительно более эффективным на практике. Приходится лишь удивляться, что метод конечных элементов не стал пока универсальным «рабочим инструментом» радиоинженеров и инженеров-электриков.

Книга П. П. Сильвестера и Р. Л. Феррари, несомненно, будет способствовать практическому овладению этим методом. Она в значительной мере носит учебный характер и базируется на общедоступном математическом аппарате. Можно надеяться, что книга окажется весьма полезной также научным работникам, преподавателям, инженерам многих специальностей, аспирантам и студентам, специализирующимся в областях электротехники, техники сверхвысоких частот, антенно-фидерных устройств, акустики, физики твердого тела.

Сентябрь 1985 г.

Ф. Ф. Дубровина

Предисловие

Хотя в настоящее время опубликовано много статей по применению метода конечных элементов к задачам электромагнетизма, книг на эту тему пока не появилось. Это тем более удивительно, что первые статьи по решению этим методом проблем электромагнетизма в технике появились в 1968 г., т. е. примерно в то же время, когда вышла первая книга по применению метода конечных элементов в гражданской инженерии.

Авторы прочли несколько курсов лекций для инженеров радио- и электротехнических специальностей и имели возможность прочувствовать неудобство, состоящее в отсутствии детального руководства по данной теме.

Хотелось бы думать, что настоящая книга окажется полезной как для аспирантов, так и для инженеров в их практической деятельности. В ней используется несложный математический аппарат, и, уделяя основное внимание применениям в определенных областях, авторы избегали попыток обрисовать общую ситуацию.

Авторы выражают признательность всем тем, кто помогал им в подготовке книги, и в особенности своим студентам.

Монреаль и Кембридж,
июнь 1983 г.

П. П. Сильвестер, Р. Л. Феррари

Предисловие к русскому изданию

Выражаем надежду, что издание нашей книги на русском языке внесет вклад в международное сотрудничество по данной тематике, к которой постоянно возрастает интерес у инженеров, работающих в различных областях радио- и электротехники.

Авторы признательны С. Хотяинцеву за его нелегкий труд, вложенный им в перевод настоящей книги, и Ф. Дубровке за внимательное редактирование перевода.

Август 1985 г.

П. П. Сильвестер, Р. Л. Феррари

Глава 1

Треугольные элементы первого порядка для двумерных задач

1.1. Введение

Конечные треугольные элементы первого порядка впервые были применены для решения относительно простых волноводных задач в 1968 г. Затем эти элементы стали использоваться для расчетов во многих областях электротехники, где необходимо определять двумерные скалярные потенциалы или волновые функции. Со временем элементы первого порядка из-за их относительно малой точности уступили место элементам высших порядков. Тем не менее их продолжают использовать в задачах, где встречаются объекты сложной формы или материалы с нелинейными характеристиками, например при анализе магнитных полей в электрических машинах и расчете распределений заряда и тока в полупроводниковых приборах.

Методы, в которых используются треугольные элементы первого порядка, можно рассматривать как двумерное обобщение методов кусочно-линейной аппроксимации, широко применяемых во всех областях электротехники. Эти методы базируются на общедоступном математическом аппарате и при несложном уровне программирования позволяют получить с помощью ЭВМ много полезных результатов. В теории электромагнитного поля существует немного методов, к которым предъявляются столь невысокие требования. Приходится лишь удивляться, что проникновение метода конечных элементов в электротехнику и электродинамику не произошло более стремительно.

В данной главе рассматриваются простые методы, в которых используются треугольные конечные элементы первого порядка для решения двумерных задач о распределении скалярного потенциала и распространении волн. Построение простых элементов для указанных задач полезно само по себе, но еще более важно то, что на этих примерах можно пояснить многие принципы, используемые во всех подобных методах.

1.2. Уравнение Лапласа

В многочисленных задачах электромагнетизма требуется решение двумерных уравнений Лапласа. Например, для

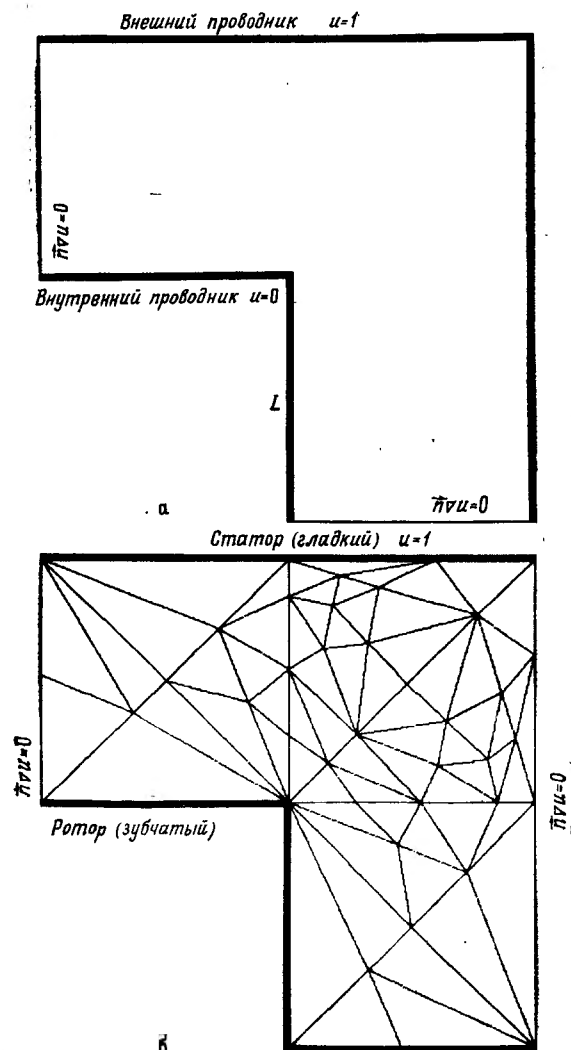


Рис. 1.1. а) Поперечное сечение одной четвертой части коаксиальной линии и граничные условия задачи. б) Поперечное сечение зазора между ротором и статором электрической машины (показана половинна шага зубчатого ротора) и моделирование этой области конечными элементами. Жирными линиями показаны границы Дирихле (заданы потенциалы). Остальные границы являются плоскостями симметрии, на которых должна обращаться в нуль нормальная производная потенциала.

изучения свойств *ТЕМ*-волны в коаксиальной линии передачи, составленной из проводников прямоугольного поперечного сечения (рис. 1.1, а), необходимо найти распределение электри-

ческого потенциала в пространстве между проводниками. Благодаря симметрии данной структуры можно при анализе ограничиться четвертой частью исследуемой области. Соответственно возникают два типа граничных условий: заданные значения потенциалов на проводящих металлических поверхностях (условия Дирихле) и равенство нулю значений нормальной производной потенциала на плоскостях симметрии. Данные граничные условия используются при нахождении потенциала u , удовлетворяющего уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (1.1)$$

Аналогично в классическом анализе электрических машин находят распределение магнитного скалярного потенциала в воздушном зазоре (рис. 1.1, б), которое также описывается уравнением Лапласа. Граничные условия при этом сходны с граничными условиями для электрического потенциала: скалярный магнитный потенциал имеет фиксированные значения на металлических поверхностях, а его нормальная производная обращается в нуль на плоскостях симметрии.

В соответствии с хорошо известным принципом минимума потенциальной энергии распределение потенциала в линии передачи или зазоре должно быть таким, чтобы минимизировать запасенную энергию. С точностью до постоянного множителя эта энергия определяется выражением

$$W(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dS, \quad (1.2)$$

где интегрирование проводится по всей двумерной области определения решения. Принцип минимума энергии математически эквивалентен уравнению Лапласа в том смысле, что распределение потенциала, удовлетворяющее уравнению Лапласа, будет также минимизировать запасенную энергию, а значения u , минимизирующие функционал (1.2), удовлетворяют уравнению Лапласа. Следовательно, возможны два варианта практического подхода к решению краевых задач теории поля. Во-первых, приближенное решение уравнения Лапласа может быть найдено непосредственно, например методом разделения переменных или конечно-разностными методами. Во-вторых, можно получить приближенное выражение для запасенной энергии $W(u)$, связанной с потенциалом $u(x, y)$, в предположении, что потенциал является комбинацией соответствующим образом выбранных простых функций с неопределенными коэффициентами. Тогда из условия минимума запасенной энергии находят эти коэффициенты и тем самым определяют приближенное распределение потенциала. Фактически все методы конечных элементов следуют второму подходу или его вариантам.

Допустим, что $u(x, y)$ есть истинное решение задачи, а $h(x, y)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль в каждой точке границы, на которой величина u задана граничными условиями. Тогда комбинация функций $(u + \theta h)$, где θ — скалярный параметр, имеет те же заданные значения на границе, что и u . Энергия $W(u + \theta h)$, связанная с этим неточным распределением потенциала, равна

$$W(u + \theta h) = W(u) + \theta \int (\nabla u)(\nabla h) dS + \frac{1}{2} \theta^2 \int |\nabla h|^2 dS. \quad (1.3)$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства можно переписать, используя теорему Грина. Тогда

$$W(u + \theta h) = W(u) + \theta^2 W(h) - \theta \int h \Delta u dS + \theta \oint_L h \nabla u dl, \quad (1.4)$$

$$dl = n dl.$$

Поскольку функция u удовлетворяет уравнению Лапласа, третье слагаемое правой части данного равенства обращается в нуль. Четвертое слагаемое правой части также должно обращаться в нуль, потому что в любой точке на границе (см. рис. 1.1) либо h , либо нормальная компонента градиента u обращаются в нуль. Следовательно,

$$W(u + \theta h) = W(u) + \theta^2 W(h). \quad (1.5)$$

Последнее слагаемое правой части равенства (1.5) положительно, поэтому $W(u)$ действительно является минимальным значением энергии, достигаемым для любой допустимой функции h при $\theta = 0$. Допустимость здесь означает два условия: 1) функция h обращается в нуль на границах области, где задана функция u ; 2) функция h должна быть по крайней мере один раз дифференцируемой.

Из уравнения (1.5) следует также, что величина энергии $W(u + \theta h)$ отличается от минимального значения $W(u)$ на величину, пропорциональную θ^2 . Если распределение потенциала не очень сильно отличается от истинного, то есть если θ мало, то ошибка в вычислении энергии будет значительно меньше, чем ошибка в вычислении потенциала. Этот факт имеет огромную практическую важность, так как фактически требуемые в инженерной практике величины зачастую тесно связаны с энергией. Таким образом, импедансы, потери мощности или собственно запасенные энергии можно рассчитать довольно точно даже при существенных погрешностях в решениях для потенциалов.

1.3. Элементы первого порядка

Приступим к построению приближенного решения простым методом конечных элементов. Для этого область, в которой необходимо найти решение задачи, разбиваем на треугольные элементы, как показано на рис. 1.1, б. Сущность метода заключается в унифицированной аппроксимации потенциала внутри каждого элемента и подборе таких распределений потенциала в различных элементах, при которых сохранялась бы его непрерывность во всей области определения.

Вначале построим приближенное решение для потенциала и связанной с ним энергии. Будем полагать, что внутри типичного треугольного элемента (рис. 1.2) потенциал адекватно аппроксимируется выражением

$$u = a + bx + cy. \quad (1.6)$$

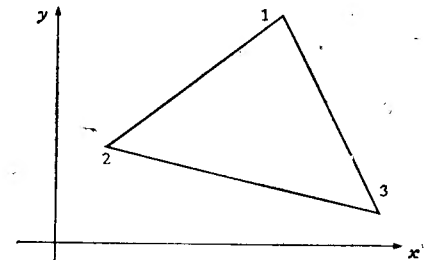


Рис. 1.2. Типичный треугольный конечный элемент в плоскости (x, y) .

Таким образом, истинное решение заменяется кусочно-планарной функцией; гладкая поверхность фактического распределения потенциала в плоскости (x, y) заменяется многогранной поверхностью аппроксимации. Необходимо, однако, отметить, что распределение потенциала вдоль любой стороны треугольника определяется линейной интерполяцией между двумя значениями потенциала в его вершинах. Поэтому, если два треугольника имеют одни и те же вершины, то потенциал на границе между ними будет непрерывным. Таким образом, поверхность $u(x, y)$, аппроксимирующая истинное решение в плоскости (x, y) , не имеет разрывов; приближенное решение является кусочно-планарным, но везде непрерывным.

Коэффициенты a, b, c в уравнении (1.6) могут быть найдены из системы трех независимых уравнений, которые получаются из условий, что потенциалы в вершинах треугольника равны u_1, u_2, u_3 . Подставляя поочередно значения этих потенциалов и координат соответствующих им вершин треугольника в уравнение (1.6), получим

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Нетрудно видеть, что детерминант матрицы коэффициентов в уравнении (1.7) равен удвоенной площади треугольника. За

исключением случая вырождения, когда площадь треугольника равна нулю, коэффициенты a , b , c легко определяются из системы уравнений (1.7).

Подстановка результатов решения системы уравнений (1.7) в уравнение (1.6) дает

$$u = [1 \ x \ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Комбинируя x , y и элементы обратной матрицы коэффициентов в новые функции положения, приведем уравнение (1.8) к следующему виду:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i \alpha_i(x, y). \quad (1.9)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} \{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\} \quad (1.10)$$

есть линейная функция, зависящая только от положения вершин треугольника, площадь которого равна A . Функции $\alpha_2(x, y)$ и $\alpha_3(x, y)$ получаются из (1.10) циклической перестановкой индексов. С помощью выражения (1.10) легко убедиться, что функции $\alpha_i(x, y)$ являются интерполяционными на трех вершинах треугольника, т. е. что каждая функция обращается в нуль на всех вершинах треугольника, за исключением одной, где она равна единице,

$$\begin{aligned} \alpha_i(x_j, y_j) &= 0, & i \neq j; \\ \alpha_i(x_j, y_j) &= 1, & i = j. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Энергию, связанную с единичным треугольным элементом, можно определить с помощью выражения (1.2), имея в виду, что областью интегрирования является область данного элемента. Градиент потенциала в пределах элемента может быть найден из уравнения (1.9) и представлен в виде

$$\nabla u = \sum_{i=1}^3 u_i \nabla \alpha_i, \quad (1.12)$$

поэтому энергия элемента

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dS \quad (1.13)$$

с учетом выражения (1.12) приобретает вид

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i u_j \int (\nabla \alpha_i) (\nabla \alpha_j) dS. \quad (1.14)$$

Для лаконичности записи введем определение матричных элементов

$$S_{ij}^{(e)} = \int (\nabla \alpha_i) (\nabla \alpha_j) dS, \quad (1.15)$$

где верхним индексом обозначен треугольный элемент. Таким образом, выражение (1.14) может быть записано в виде квадратичной формы

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} u^T S^{(e)} u. \quad (1.16)$$

Здесь u — вектор, стоящий в левой части уравнения (1.7), индекс T означает транспонирование.

Матрицу S нетрудно вычислить для любого заданного треугольника. Подстановка соотношения (1.10) и его циклической перестановки в выражение (1.15) и выполнение несложных алгебраических преобразований приводят к следующему выражению для $S_{12}^{(e)}$:

$$S_{12}^{(e)} = \frac{1}{4A} \{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\}. \quad (1.17)$$

Аналогичные выражения можно найти и для других элементов матрицы S .

1.4. Объединение элементов

Итак, описанный выше способ позволяет получить приближенное выражение для энергии элемента через значения потенциалов в узловых точках. Полная энергия совокупности многих элементов в общем случае равна сумме энергий отдельных элементов

$$W = \sum_e W^{(e)}. \quad (1.18)$$

Любая сложная модель, составленная из треугольных элементов, может быть построена путем поочередного добавления новых треугольников. Поэтому достаточно рассмотреть, как обеспечивается непрерывность потенциала для случая, когда к уже существующему ансамблю элементов добавляется один треугольный элемент. Для простоты будем полагать, что существующий ансамбль элементов состоит из одного треугольника (1, 2, 3) (рис. 1.3, а) и к нему должен быть

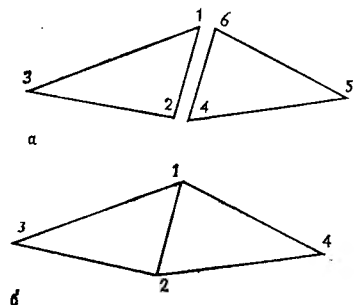


Рис. 1.3. а) Смежные треугольные элементы, которые считаются электрически изолированными. б) Смежные треугольные элементы с непрерывными потенциалами и соответственно перенумерованными узлами.

присоединен треугольник (4, 5, 6). Так как каждый треугольник характеризуется тремя значениями потенциала, все возможные состояния этой пары элементов описываются вектором-столбцом, содержащим все шесть значений потенциалов в вершинах треугольников:

$$u_d^T = [u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6]_d, \quad (1.19)$$

где индекс d указывает на то, что рассматриваются разьединенные элементы (элементы пока не соединены вместе). Полная энергия пары элементов в таком случае равна

$$W = \frac{1}{2} u_d^T S_d u_d. \quad (1.20)$$

Здесь

$$S_d = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} & & & \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & & & \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & & & \\ & & & S_{44}^{(2)} & S_{45}^{(2)} & S_{46}^{(2)} \\ & & & S_{54}^{(2)} & S_{55}^{(2)} & S_{56}^{(2)} \\ & & & S_{64}^{(2)} & S_{65}^{(2)} & S_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

представляет собой матрицу S (матрицу Дирихле) разьединенной пары элементов. Эту матрицу можно записать более кратко в блочной форме

$$S_d = \begin{bmatrix} S^{(1)} & 0 \\ 0 & S^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

В ансамбле элементов значения потенциалов физически должны быть непрерывными на границах между элементами. Поскольку потенциал в каждом треугольнике аппроксимируется линейной функцией x и y , то вдоль любой стороны треугольника значение потенциала изменяется линейно с расстоянием. Следовательно, требование непрерывности потенциалов удовлетворяется при условии, что значения потенциалов в совпадающих вершинах разных треугольников равны друг другу. Другими словами, потенциал в области элементов, изображенных на рис. 1.3, *а*, будет непрерывным, если соблюдено равенство потенциалов в вершинах треугольников 1 и 6, 2 и 4. Такое равенство потенциалов косвенно выражено в нумерации узлов четырехугольной области на рис. 1.3, *б*.

Конечно, нет никакой необходимости в установлении особой связи между номерами узлов треугольников, с одной стороны, и четырехугольников — с другой. Нумерация, показанная на рис. 1.3, является совершенно произвольной. Требова-

ние равенства потенциалов в вершинах (узловых потенциалах) может быть выражено в матричной форме с помощью прямоугольной матрицы C , связывающей потенциалы разьединенных элементов с потенциалами объединенного набора элементов (называемого также связанной системой):

$$u_d = C u_c, \quad (1.23)$$

где индексы d и c обозначают соответственно разьединенные и объединенные совокупности элементов. При нумерации точек, показанной на рис. 1.3, это соотношение принимает вид

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

В соотношении (1.24) опущены матричные элементы, которые обращаются в нуль из-за отсутствия связи между соответствующими вершинами. Подставляя соотношение (1.23) в (1.20), находим выражение для энергии связанной системы элементов

$$W = \frac{1}{2} u_c^T S u_c. \quad (1.25)$$

Здесь

$$S = C^T S_d C \quad (1.26)$$

представляет матрицу коэффициентов связанной системы элементов. Для связанной системы из двух треугольников, показанной на рис. 1.3,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{66}^{(2)} & S_{12}^{(1)} + S_{64}^{(2)} & S_{13}^{(1)} & S_{65}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} + S_{46}^{(2)} & S_{22}^{(1)} + S_{44}^{(2)} & S_{23}^{(1)} & S_{45}^{(2)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{31}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & 0 \\ S_{56}^{(2)} & S_{54}^{(2)} & 0 & S_{55}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Нумерации разьединенных и объединенных элементов чаще называют соответственно *локальной* и *глобальной*.

1.5. Решение задачи

В предыдущих двух разделах энергия приближенного непрерывного распределения потенциала была представлена в квадратичной форме, включающей вектор-столбец узловых

потенциалов. Чтобы получить приближенное решение уравнения Лапласа, остается минимизировать запасенную энергию в модели связанной системы конечных элементов. Поскольку выражение для энергии (1.25) квадратично относительно узловых потенциалов, то оно должно иметь единственный минимум как функция каждой составляющей вектора потенциалов u . Следовательно, требование минимума энергии будет соответствовать системе уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial u_k} = 0. \quad (1.28)$$

Здесь индекс k относится к узловым компонентам вектора связанных потенциалов, и, что эквивалентно, к номерам узлов в связанной модели. Система уравнений (1.28) имеет тривиальное решение $u_k = 0$, соответствующее обращению в нуль всех узловых потенциалов и полной потенциальной энергии. Однако такая неограниченная минимизация не соответствует граничной задаче в ее первоначальной постановке, представленной на рис. 1.1. Действительно, в решаемой граничной задаче определенные участки границы имеют заданные потенциалы; следовательно, определенная незначительная часть потенциалов, содержащихся в векторе u , должна принимать, вообще говоря, отличные от нуля заданные значения. Предположим, что нумерация узлов в связанной модели такова, что все узлы, в которых потенциалы могут варьироваться, нумеруются первыми, а все узлы с заданными потенциалами — последними. Например, на рис. 1.1, а узлы в пространстве между проводниками (где потенциалы подлежат определению) должны быть пронумерованы первыми, а все узлы, лежащие на поверхностях проводников (где потенциалы заданы), нумеруются последними. Тогда система уравнений (1.28) может быть записана с использованием матрицы в блочной форме

$$\frac{\partial}{\partial [u_f]_k} [u_f^T u_p^T] \cdot \begin{bmatrix} S_{ff} & S_{fp} \\ S_{pf} & S_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_f \\ u_p \end{bmatrix} = 0, \quad (1.29)$$

где нижние индексы f и p относятся соответственно к узлам со свободными и заданными потенциалами. Выполняя дифференцирование в системе (1.29), получаем следующее матричное уравнение:

$$[S_{ff} \ S_{fp}] \cdot \begin{bmatrix} u_f \\ u_p \end{bmatrix} = 0. \quad (1.30)$$

Прямоугольная матрица коэффициентов в этом уравнении содержит столько строк, сколько имеется неограниченных (свободных) переменных u_f , но число столбцов равно общему

числу свободных и заданных узловых потенциалов. Уравнение (1.30) можно записать в виде

$$S_{ff} u_f = -S_{fp} u_p. \quad (1.31)$$

Матрица коэффициентов S_{ff} в левой части этого уравнения — квадратная и, вообще говоря, не особенная. Поэтому формальное решение задачи можно представить в следующей форме:

$$u = \begin{bmatrix} -S_{ff}^{-1} S_{fp} & u_p \\ u_p \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Приближенное численное решение задачи имеет вид ряда значений узловых потенциалов. Однако важно отметить, что

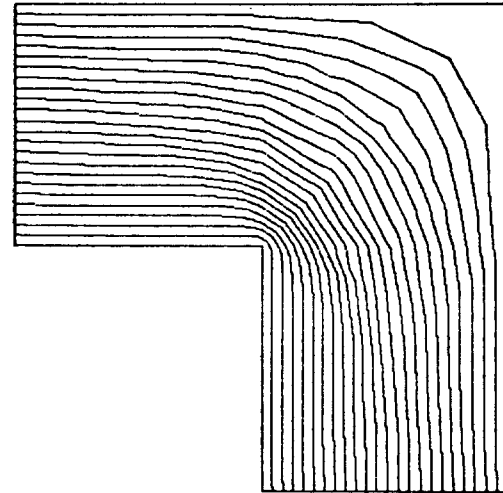


Рис. 1.4. Контуры сечения эквипотенциальных поверхностей в коаксиальной линии (условия задачи приведены на рис. 1.1, а).

решение задачи методом конечных элементов является единственным и точно определенным везде, а не только на вершинах треугольников, ибо минимизация энергии предполагает особую форму поверхности решения. Ряд значений узловых потенциалов является просто компактным представлением кусочно-планарной поверхности решения, которое дает минимум энергии.

В пределах каждого треугольника локальные значения потенциалов описываются выражением (1.6). Следовательно, не требуется никакой дальнейшей аппроксимации для получения графиков эквипотенциалей или для расчета полной запасенной энергии, или для выполнения любых других дальнейших

манипуляций. Поскольку в этом методе потенциал в каждом элементе определяется линейной интерполяцией его узловых значений, картина эквипотенциалей будет состоять из кусочно-прямолинейных контуров. В качестве примера на рис. 1.4 показана картина эквипотенциалей для задачи, приведенной на рис. 1.1, а. Следует обратить внимание, что граничные условия Дирихле (требующие, чтобы потенциал принимал заданные значения на границах) удовлетворяются точно, потому что значения потенциалов в узлах, расположенных на границах, задаются явно при составлении уравнений (1.30), (1.31). С другой стороны, однородное граничное условие Неймана (т. е. требование обращения в нуль нормальной производной) удовлетворяется не точно, а лишь в некотором усредненном смысле — обращении в нуль слагаемого с контурным интегралом в выражении (1.4). Конечно, можно было бы потребовать строгого выполнения этого граничного условия, но при этом возросла бы энергия поля, так что решение стало бы фактически менее точным. Этот вопрос будет детально рассмотрен ниже. Грубо говоря, полученная в данной процедуре ошибка из-за неточного удовлетворения условия Неймана приводит к увеличению точности в области определения решения.

1.6. Уравнение Пуассона

Если в пределах области имеются распределенные источники, то для решения задачи может быть использован подход, аналогичный вышеприведенному, с той лишь разницей, что в схему решения должны быть явно включены распределения источников. В качестве простого примера на рис. 1.5 показан проводник электрической машины, лежащий в пазе. Можно легко показать, что магнитное поле в пазе может быть описано векторным потенциалом A магнитного поля, который удовлетворяет уравнению Пуассона в векторной форме. Если паз и проводник предполагаются бесконечно длинными, то плотность тока J и векторный потенциал A содержат только продольные компоненты. В этом случае векторное уравнение Пуассона вырождается в свой скалярный эквивалент

$$\Delta A = -\mu_0 J. \quad (1.33)$$

Если магнитопровод электрической машины предполагается бесконечно проницаемым, нормальная производная от A на центральной линии в щели и на всех поверхностях магнитопровода должна быть равна нулю. Далее, любое постоянное значение A определяет линию магнитного потока. Тем самым ясно определяются граничные условия для данной за-

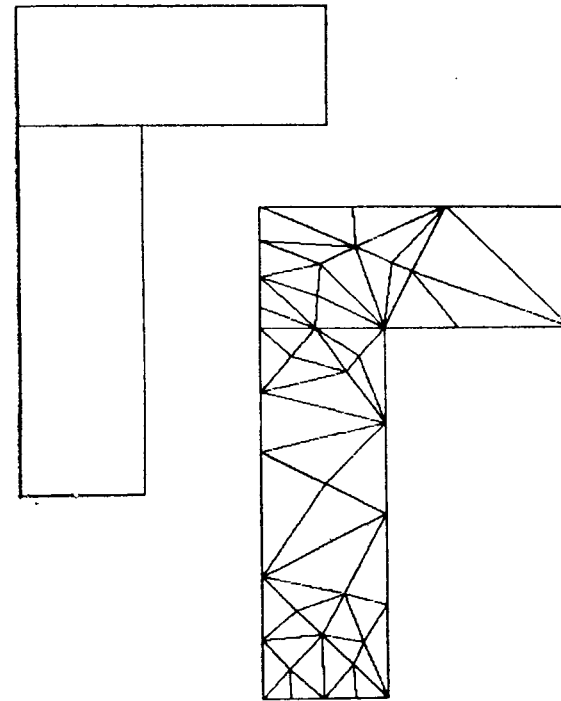


Рис. 1.5. Паз в роторе электрической машины и его модель из треугольных конечных элементов.

дачи. Вариационной задачей, эквивалентной решению уравнений Пуассона, в данном случае оказывается минимизация связанного с энергией функционала

$$F(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dS - \mu_0 \int u J dS. \quad (1.34)$$

Для доказательства того, что этот функционал достигает минимума при $u = A$ — истинном решении уравнения (1.33), допустим, что $u = A + \theta v$, причем v — некоторая дифференцируемая функция, которая обращается в нуль во всех граничных точках, где A задано, а θ — числовой параметр. При этом

$$\begin{aligned} F(A + \theta v) &= \\ &= F(A) + \theta \int (\nabla A)(\nabla v) dS - \theta \mu_0 \int v J dS + \frac{1}{2} \theta^2 \int |\nabla v|^2 dS. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Вновь используя теорему Грина, преобразуем второе слагаемое в правой части этого выражения

$$\int (\nabla A)(\nabla v) dS = \oint_L v \nabla A dl - \int v \Delta A dS, \quad (1.36)$$

$$dl = n dl.$$

Контурный интеграл в правой части обращается в нуль, так как либо v , либо нормальная производная от A обращаются в нуль на границе. Поскольку A есть точное решение уравнения (1.33), то равенство (1.36) можно переписать в ином виде, воспользовавшись следующим выражением для второго слагаемого правой части (1.36):

$$-\int v \Delta A dS = \mu_0 \int v J dS. \quad (1.37)$$

Таким образом, функционал (1.35) упрощается

$$F(A + \theta v) = F(A) + \frac{1}{2} \theta^2 \int |\nabla v|^2 dS. \quad (1.38)$$

Поскольку интеграл в правой части этого выражения всегда положителен, то очевидно, что минимум достигается при $\theta = 0$. Соответственно $F(u)$ достигает своего минимального значения при $u = A$.

Отметим, что энергия поля определяется обычным выражением

$$W = \frac{1}{2} \int |\nabla A|^2 dS, \quad (1.39)$$

которое при учете уравнения (1.33) и граничных условий принимает вид

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int AJ dS. \quad (1.40)$$

В минимуме функционал $F(A)$, очевидно, имеет отрицательное значение, равное по величине полной энергии W . Как и в предыдущем случае, поправка к F (1.38) пропорциональна θ^2 . Поэтому при малых θ точность, с которой может быть найдена энергия, очень высока даже при не очень точных локальных значениях потенциалов.

1.7. Моделирование источника

Решение уравнения Пуассона методом конечных элементов предусматривает процедуру, подобную той, которая была применена для уравнения Лапласа. Область определения решения будет триангулирована, как показано на рис. 1.5, и сначала будет исследован типичный треугольный элемент, изолированный от всех остальных.

Так как первое слагаемое правой части (1.34) совпадает с правой частью уравнения (1.2), то процесс дискретизации приводит к тому же результату, что и для связанной модели, т. е. к уравнению (1.25). Для второго слагаемого правой части уравнения (1.34) требуется аналогичная процедура, лишь несколько отличающаяся в деталях.

В каждом из треугольных элементов заданная плотность тока $J(x, y)$ аппроксимируется аналогично потенциалу

$$J(x, y) = \sum_{i=1}^3 J_i \alpha_i(x, y). \quad (1.41)$$

Коэффициенты в правой части этого выражения представляют собой значения плотности тока в вершинах треугольника. Эти значения, конечно, известны, поскольку плотность тока — заданная функция. Поэтому интеграл в правой части (1.40) может быть записан в виде

$$\int AJ dS = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i J_j \int \alpha_i \alpha_j dS, \quad (1.42)$$

где неизвестными являются лишь значения потенциалов в вершинах треугольника. Для каждого элемента введем квадратную матрицу третьего порядка, определяемую выражением

$$T_{ij}^{(e)} = \int \alpha_i \alpha_j dS. \quad (1.43)$$

Тогда интеграл (1.42) приобретает вид

$$\int AJ dS = \mathbf{A}^T \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{J}, \quad (1.44)$$

где верхний индекс e идентифицирует элемент, а область интегрирования, естественно, соответствует этому элементу.

Для разъединенного набора треугольных элементов функционал (1.34) можно записать в форме

$$F(A) = \frac{1}{2} \mathbf{A}_d^T \mathbf{S}_d \mathbf{A}_d - \mu_0 \mathbf{A}_d^T \mathbf{T}_d \mathbf{J}_d. \quad (1.45)$$

Взаимосвязь элементов выражается в требовании непрерывности потенциала и, следовательно, в преобразовании, аналогичном (1.23). Таким образом,

$$F(A) = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} - \mu_0 \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mathbf{T}_d \mathbf{J}_d. \quad (1.46)$$

Минимизация $F(A)$ по всем варьируемым узловым потенциалам приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = 0, \quad (1.47)$$

матричная форма которой имеет вид

$$S'A = \mu_0 C^T T_d J_d. \quad (1.48)$$

Это уравнение является разрешающим для данной граничной задачи.

Вообще говоря, на плотность источников не наложено требование непрерывности на границах между элементами. По-

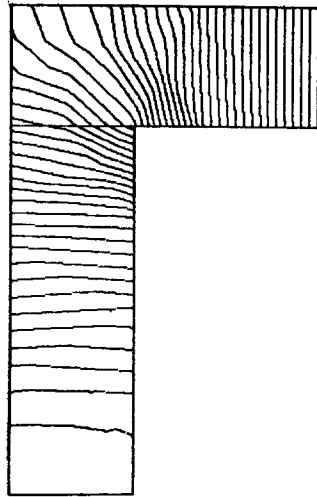


Рис. 1.6. Решение задачи для паза в роторе, представленной на рис. 1.5.

этому, за исключением особых случаев, не требуется проводить никаких дальнейших преобразований в правой части уравнения (1.48).

Поскольку дифференцирование в уравнении (1.47) выполняется лишь по отношению к варьируемым потенциалам, то матрица S' в уравнении (1.48) является прямоугольной. Она содержит столько строк, сколько имеется свободных узлов (где потенциал не определен граничными условиями), и столько столбцов, сколько имеется всех узлов в модели. Как и в уравнении (1.30), разделим вектор узловых потенциалов таким образом, чтобы все свобод-

$$[S_{ff} \ S_{fp}] \cdot \begin{bmatrix} A_f \\ A_p \end{bmatrix} = \mu_0 C^T T_d J_d. \quad (1.49)$$

Как и прежде, нижние индексы f и p относятся соответственно к свободным и заданным значениям потенциалов. Поскольку последние значения известны, целесообразно перенести их в правую часть

$$S_{ff} A_f = \mu_0 C^T T_d J_d - S_{fp} A_p. \quad (1.50)$$

Решение этого уравнения определяет неизвестные значения узловых потенциалов и, следовательно, является решением задачи.

Интересно отметить, что правая часть уравнения (1.50) сочетает в себе вклад как источника (неоднородной части

уравнения (1.33)), так и заданных граничных значений (т. е. неоднородной части граничных условий). Таким образом, нет коренного различия между представлением однородного дифференциального уравнения с неоднородными граничными условиями, с одной стороны, и неоднородного дифференциального уравнения с однородными граничными условиями — с другой.

Решение, в котором используется довольно простая триангуляция (рис. 1.5), показано на рис. 1.6. Точно так же как и в случае уравнения Лапласа, граничные условия Дирихле строго выполняются, тогда как граничные условия Неймана не выполняются. Как видно на рис. 1.6, последние условия локально нарушаются, но удовлетворяются в среднем.

1.8. Практическая реализация граничных условий

Как следует из уравнений (1.30), (1.49), при решении задачи методом конечных элементов требуется нумерация переменных некоторым специальным образом. Чтобы получить уравнения в данном виде, необходимо все фиксированные потенциалы нумеровать последними, а свободные потенциалы должны быть пронумерованы первыми. На практике, однако, не всегда удобно перенумеровывать переменные и соответственно разделять матрицы. К счастью, перенумерация и разбиение требуются только для целей объяснения; в практических расчетах необходимость в них отсутствует.

Рассмотрим вновь очень простую двухэлементную задачу, показанную на рис. 1.3, б. Предположим, что потенциалы 3 и 4 фиксированы, а 1 и 2 свободны. Другими словами, нумерация переменных находится в полном соответствии со схемой, использованной выше. Следуя (1.49), получаем следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_{13} & S_{14} \\ S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

О потенциалах с высокими номерами, имеющих фиксированное значение, много не скажешь. Единственным уравнением, которое может быть использовано для их описания, является тождество

$$D \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{33} & \\ & D_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (1.52)$$

где D — любая квадратная диагональная матрица. Уравнение (1.52) является просто подтверждением того, что фиксированные потенциалы таковы, каковы они есть на самом деле.

Уравнение (1.52) может быть объединено с уравнением (1.51)

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & & \\ S_{21} & S_{22} & & \\ & & D_{33} & \\ & & & D_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{13} & -S_{14} \\ -S_{23} & -S_{24} \\ D_{33} & \\ & D_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

Далее допустим, что введена произвольная нумерация для потенциалов, при которой свободные и фиксированные потенциалы не обязательно берутся в какой-либо последовательности. Например, допустим, что вершины 1—2—3—4 перенумерованы на 2—4—1—3, так что фиксированные потенциалы теперь остаются на узлах 1 и 3. Очевидно, что в результате перенумерации физическая задача не изменилась никоим образом, только строки и столбцы матрицы коэффициентов в уравнении (1.53) переставляются в новой последовательности в соответствии с новой нумерацией. Поэтому (1.53) принимает вид

$$\begin{bmatrix} D_{11} & & & \\ & S_{22} & S_{24} & \\ & & D_{33} & \\ & S_{42} & & S_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & & \\ -S_{21} & -S_{23} & \\ & D_{33} & \\ -S_{41} & -S_{43} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Пустые места в матрицах означают, что матричные элементы здесь равны нулю. Это является следствием структуры задачи и не зависит от физических размеров или свойств материала.

Несмотря на то что уравнение (1.54) имеет больше строк и столбцов, чем уравнение (1.51), и стоимость его решения на ЭВМ выше, нет никакой необходимости в особенной нумерации вершин треугольников и потенциалов. Они могут быть пронумерованы в любом удобном порядке. Так, увеличенная стоимость решения матричной задачи, по крайней мере частично, компенсируется экономией работы, которую необходимо затратить на перенумерацию и переформулирование уравнений.

На практике в качестве диагональной матрицы D зачастую берется единичная матрица $D=I$. Иногда используют матрицу D , элементы которой очень велики или малы по сравнению с единицей, поэтому учет ошибок округления при вычислениях может диктовать различный выбор D . Например, если матричные элементы оказываются величинами порядка $1.0E-10$, то при расчетах на ЭВМ с семью значащими цифрами они могут быть ошибочно положены равными нулю. К счастью, такие случаи бывают редко, поэтому равенство

$D=I$ используется очень часто. При этом уравнение (1.54) упрощается

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & S_{22} & S_{24} & \\ & & 1 & \\ & S_{42} & & S_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -S_{21} & -S_{23} & \\ & 1 & \\ -S_{41} & -S_{43} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

Равенство (1.55) означает, что построение уравнений конечных элементов и наложение граничных условий могут выполняться и на основе последовательной нумерации элементов.

1.9. Программирование и структура данных

Основное достоинство метода конечных элементов даже при использовании треугольных элементов первого порядка заключается в присущей ему значительной «геометрической» гибкости. В отличие от многих других численных методов применимость метода конечных элементов существенно меньше зависит от геометрических форм, с которыми приходится иметь дело. Например, используя треугольные элементы, можно удовлетворительно представить любую двумерную область, границы которой могут быть аппроксимированы рядом прямолинейных отрезков. Необходимо также отметить, что сетка из треугольных элементов, с помощью которой моделируется внутренняя область задачи, не является регулярной ни геометрически, ни топологически. Это значит, что размеры и формы треугольников могут изменяться произвольно, а их взаимные соединения не обязательно должны следовать какой-либо регулярной структуре.

Приближенное решение данной физической задачи методом конечных элементов можно разделить на пять отдельных этапов:

- 1) построение сетки из конечных элементов, т. е. разбиение области определения решения на элементы;
- 2) выявление источников и граничных значений величин задачи;
- 3) построение матричного представления для каждого элемента;
- 4) объединение всех элементов в ансамбль путем матричных преобразований, аналогичных (1.26), и наложение граничных условий;
- 5) решение результирующей системы алгебраических уравнений;
- 6) вывод и оценка результатов.

В сущности на первом этапе геометрически и математически сложная граничная задача описывается для разьединенного набора элементов. Все последующие этапы служат для соединения этих элементов некоторым определенным способом с тем, чтобы получить желаемый результат. Три средних этапа включают в себя вычислительную работу повторяющегося и систематического характера, поэтому являются идеально подходящими для цифровых ЭВМ. Матричное представление каждого треугольного элемента может быть получено при условии, что известны только расположения вершин этого треугольника без какого-либо учета структуры разбиения. И наоборот, объединение и наложение граничных условий требуют только знания топологии сетки, т. е. способа соединения треугольников между собой.

Для объединения матриц отдельных элементов в одну глобальную матрицу необходимо, чтобы было выполнено преобразование связи (1.22), (1.23). Вся требуемая топологическая информация содержится в матрице связи C . Однако было бы в высшей степени неэффективно хранить матрицу связи в явной форме (уравнение (1.24)), а разьединенные глобальные матрицы — в виде (1.21), так как в обоих случаях матрицы имеют своеобразную структуру и содержат высокий процент нулевых элементов. Ключ к эффективному объединению дается выражением (1.27). Оно может быть переписано в виде

$$S = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{66}^{(2)} & S_{64}^{(2)} & S_{65}^{(2)} \\ S_{46}^{(2)} & S_{44}^{(2)} & S_{45}^{(2)} \\ S_{56}^{(2)} & S_{54}^{(2)} & S_{55}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (1.56)$$

который наводит на мысль, что в общем случае объединенная S -матрица может быть получена вычислением матрицы каждого отдельного элемента с последующим добавлением девяти ненулевых матричных вкладов, обусловленных этим элементом, к соответствующим элементам глобальной S -матрицы. Этот подход в свою очередь предполагает очень компактный и удобный метод хранения топологической информации, содержащейся в матрице C , с помощью массива, который определяет вершины каждого треугольника через их глобальные узловые номера.

В качестве примера рассмотрим очень простое сеточное представление (рис. 1.7) для задачи определения поля проводника в пазах; N треугольников, которые представляют область определения решения, могут быть описаны массивом $3 \times N$, дающим номера узлов, и массивом $1 \times N$ данных о

плотности источников в элементах. Эти массивы могут считываться с входных устройств (считывателя перфокарт, терминала и т. д.). В случае одного элемента на входную линию исходные данные для этой задачи получаются следующими:

1	2	3	1.000
2	4	3	1.000
3	4	5	0.000
4	7	6	0.000
4	6	5	0.000

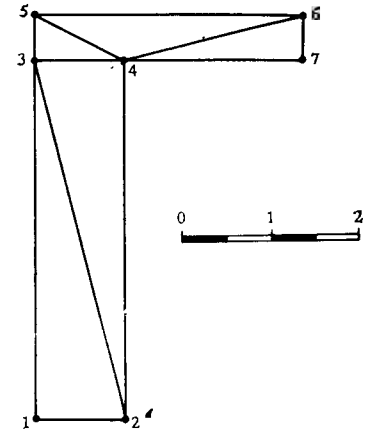


Рис. 1.7. Очень простая модель паза в роторе, иллюстрирующая методику представления данных.

Объединение треугольников осуществляется путем обнуления матрицы S , формирования матрицы элемента для треугольника (1, 2, 3), добавления к S полученных таким образом девяти чисел. Затем вычисляется матрица элемента для треугольника (2, 4, 3), добавляется к S и т. д. до тех пор, пока не будет составлена полная матрица S . Вычисление матричного представления для каждого отдельного элемента требует знания координат его вершин. Для этой цели необходимо иметь массивы $1 \times M$, содержащие координаты x и y :

0.000	0.000
1.000	0.000
0.000	4.000
1.000	4.000
0.000	4.500
3.000	4.500
3.000	4.000

Наконец, должны быть введены граничные условия. Для этой цели достаточно указать номера граничных точек и соответствующие им граничные значения, например:

6	0.000
7	0.000

Результирующая программа, составленная на языке Фортран, приводится ниже в разд. 1.10. Следует отметить, что

собственно программа не содержит никакой специфической информации о частной решаемой задаче. Вся геометрическая, топологическая и другая зависящая от задачи информация размещается в массивах исходных данных, которые подготавливаются отдельно и считываются, когда это необходимо. Поэтому, используя одну и ту же программу, можно решить совершенно отличную от этой задачу для уравнения Пуассона, если снабдить программу другим файлом исходных данных.

1.10. Пример программы

Методы, изложенные выше, воплощены в программу на языке Фортран, приведенную в конце данной главы (см. стр. 32). В этой программе используются только простейшие методы. Однако структура программы в основном идентична структуре многих очень больших комплексных программ, которые используются в настоящее время.

Пакет программ метода конечных элементов, описанный здесь, включает основную программу и несколько подпрограмм. Основная программа не содержит никаких выполняемых операторов, кроме вызова подпрограмм. Она связывается с подпрограммами через COMMON-блок, который вводится идентично во всех подпрограммах. Иными словами, массивы и другие данные размещаются в зоне памяти ЭВМ, одинаково доступной для всех частей программы. Практическая значимость такого расположения данных весьма велика: если требуется любое изменение (например, размерности массивов), то необходимо только перестроить COMMON-блок соответствующим образом, а затем заменить COMMON-блок в каждой подпрограмме идентичной копией нового варианта. Никакого другого нового программирования и обширной проверки программы не потребуется.

Приведенная ниже главная программа является чисто управляющим механизмом. Она определяет структуру исходных данных и последовательность вызова подпрограмм, но не выполняет фактически никаких расчетов. Такая организация программы является общепринятой, так как она позволяет заменять отдельные подпрограммы без влияния этой операции на другие подпрограммы. Например, по программе, приведенной здесь, можно было бы решать дифференциальные уравнения в частных производных, отличные от уравнения Пуассона, при условии, что использованные матрицы элементов были бы подходящими для этого дифференциального уравнения. Поскольку матрицы элементов строятся по одной подпрограмме, которая не выполняет никаких других операций, необходимое изменение программы состоит в удалении

одной этой подпрограммы и замене ее другой. Функции других подпрограмм, такие, как ввод исходных данных и решение уравнения, не затрагиваются.

Подпрограммы, вызываемые основной программой, в порядке их появления следующие:

MESHIN считывает исходные данные задачи и хранит их в разных массивах данных. Она выполняет очень ограниченное количество проверок. Более сложные программы этого типа отличаются количеством выполняемых проверок данных. Часто они являются наибольшими отдельными подпрограммами в программах метода конечных элементов, потому что число возможных ошибок в исходных данных очень велико. Имеются ли перекрывающиеся треугольники? Обозначены ли надлежащим образом все вершины треугольников как узлы? Являются ли они все геометрически различными? Является ли задача плохо поставленной (например, все потенциалы фиксированы)? Разрешима ли эта задача (например, имеются ли вообще какие-нибудь фиксированные значения на границах)?

SZERO обнуляет глобальные матрицы элементов.

ELMATR вычисляет матричное представление треугольного элемента первого порядка. Для этого используются способы, обсуждаемые детально в гл. 3 и немного отличающиеся от приведенных выше.

ELEMBD вносит вклады матрицы отдельного элемента в глобальную матрицу коэффициентов в правую часть.

EQSOLV решает систему алгебраических уравнений, с тем чтобы получить неизвестные заранее потенциалы. Допускается перемешивание фиксированных и свободных потенциалов, как обсуждалось в разд. 1.8. Следовательно, нет необходимости в том, чтобы подпрограмме EQSOLV предшествовали перенумерация и перестройка уравнений и переменных. EQSOLV подробно описана в гл. 7.

OUTPUT выводит полученное решение на печатающее устройство. Во многих программах, реализующих метод конечных элементов, эта подпрограмма оказывается очень сложной. В нее часто включают построение графиков, расчет полной энергии, определение максимальных значений поля и многих других представляющих интерес величин.

В заключение следует отметить, что методы конечных элементов неизбежно ведут к относительно сложному программированию, если предусматривается достаточная гибкость в структуре задачи. С другой стороны, даже на простейшем уровне программ методы конечных элементов могут (и должны) быть написаны так, чтобы они были в высокой степени независимыми от конкретной задачи. Важно, чтобы пользователь методов конечных элементов приобрел некоторое понимание структуры программы, а также понимание связан-

ной с этим методом математики. Однако было бы безрасходно заниматься целенаправленным созданием программы для конкретной задачи — создание эффективных и свободных от ошибок программ представляет сложную задачу, и зачастую лучше всего оставить ее специалистам. Для пользователя, заинтересованного главным образом в решении конкретных задач, лучше вкладывать свои усилия в модификацию уже существующих программ, нежели поддаваться соблазну начать все сначала.

1.11. Краткий обзор литературы

Метод конечных элементов, в котором используются элементы первого порядка, уже применялся для решения множества разнообразных задач электротехники и электродинамики, и нет никакого сомнения, что он будет использоваться и в дальнейшем. Хотя метод элементов первого порядка не обеспечивает высокой точности решения, он тем не менее прост для понимания, для программирования и прежде всего для формулировки задач, в которых основные физические уравнения сложнее рассматривавшихся в этой главе.

Первое применение треугольных элементов для расчета электрических и других потенциальных полей, вероятно, принадлежит Куранту [1]. В его статье впервые были развиты методы кусочной аппроксимации, подобные методу конечных элементов. Методы треугольных элементов первого порядка в современном их виде были развиты Даффином [2], который указал способы решения и отметил не только возможность получения приближенных решений, но и ограничения для энергии поля.

Имеется много монографий и учебников по теории метода конечных элементов в приложении к строительной механике. К сожалению, они редко бывают такими, чтобы их легко мог читать электро- и радиоинженер. Учебник Норри и де Вриза [3] написан с точки зрения инженера-строителя, но является достаточно общим для многих дисциплин и может также пригодиться некоторым инженерам-электрикам. Небольшая книга Оуэна и Хинтона [4] — легкая для чтения, но не может удовлетворить достаточно широкий круг читателей, так как она охватывает ненамного больше материала, чем содержится в этой главе.

Однако недостаток учебного материала в этой области с лихвой компенсируется статьями в периодических изданиях и трудах конференций. С ростом популярности методов конечных элементов в строительной механике в 60-х гг. Зенкевич и Чунг [5] предприняли попытку получить решение практически важных задач для потенциалов и опубликовали свои

результаты. Вскоре после этого Сильвестером [6], а также Ахмедом и Дэйли [7] были применены треугольные элементы первого порядка для задач электротехники.

Геометрическая гибкость, связанная с применением треугольников первого порядка, настолько понравилась многим исследователям, что иногда они используют эти элементы даже там, где элементы высших порядков, вероятно, дали бы более высокую точность при меньших затратах на вычисления. Андерсен [8] привел примеры хорошо работающих программ, в которых используются треугольные элементы первого порядка для повседневной работы по проектированию (конструированию, разработке).

Теория электрических цепей является определенным приближением в теории электромагнитного поля. Тем не менее электро- и радиоинженерам теория цепей более доступна, чем теория поля. Карпентер [9] дал трактовку метода конечных элементов первого порядка применительно к цепям.

Методы конечных элементов первого порядка напоминают классические конечно-разностные методы, особенно когда используются итерационные методы решения системы уравнений. Поэтому возникает вопрос: какой метод предпочтительнее? Эта проблема была исследована Демердашем и Нехлом [10], которые сравнили результаты для тестовых задач, решенных обоими методами. Методы конечных элементов оказались предпочтительными даже при использовании элементов первого порядка.

Интересной особенностью всех методов конечных элементов является единственность приближенного решения во всех точках области, а не только в определенных дискретно выбранных точках, как это имеет место в конечно-разностных методах. Поэтому дальнейшее использование этих решений зачастую не требует никакой дополнительной аппроксимации. Например, Дэйли и Хелпс [11] рассчитали емкости непосредственно с помощью метода конечных элементов без дополнительных предположений. Аналогично Берд [12] оценил потери в волноводе на основании полученного численного решения.

ПРИМЕР ФОРТРАН-ПРОГРАММЫ

***** ДЕМОНСТРАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ *****

Эта программа считывает исходные данные задачи из файла INPUT и обрабатывает их. Как исходные данные, так и результат обработки записываются в файл KONSOL. Номера логических устройств определяются в операторах данных.

Подпрограммы, составляющие эту программу, взаимодействуют через единый COMMON-блок и используют следующие переменные:

INPUT = номер вводного устройства (файла)
KONSOL = номер выводного устройства (файла)
IERR = флажок ошибки, содержит 0, если все в порядке
NVE = число узловых переменных элемента
MAXNOD = максимальный номер узла (размерность массива)
MAXELM = максимально допустимое число элементов
NODES = число узлов в задаче
NELMTS = число элементов в модели
X, Y = узловые координаты
NVTX = список узлов для каждого элемента
SOURCE = плотность источника в каждом элементе
CONSTR = ИСТИНА для фикс. потенциалов (лог. переменная)
POTENT = массив узловых потенциалов
RTHDSD = правая часть системы уравнений
SELM = S для одного элемента (рабочий массив)
TELM = T для одного элемента (рабочий массив)
S = глобальная S-матрица для всей задачи
INTG = рабочий массив (целочисленный)

LOGICAL CONSTR

Размерности следующих массивов равны MAXNOD:

DIMENSION X(50), Y(50), S(50,50)
DIMENSION CONSTR(50), RTHDSD(50), POTENT(50)

Размерности следующих массивов
равны MAXELM и/или NVE:

DIMENSION NVTX(3,75), SOURCE(75), SELM(3,3), TELM(3,3),
1 INTG(3)

```

C
COMMON INPUT, KONSOL, IERR, NVE, MAXNOD, MAXELM, NODES,
1 NELMTS, X, Y, NVTX, SOURCE, CONSTR, POTENT, RTHDSD,
2 SELM, TELM, S, INTG
C
C-----
C
DATA MAXNOD, MAXELM, NVE /50, 75, 3/
INPUT = 5
KONSOL = 7
C
C Загрузка исходных данных из вводного файла
C
CALL MESHIN
IF (IERR .NE. 0) GO TO 900
C
C Обнуление глобальной S-матрицы и правой части
C
CALL SZERO
C
C Формирование матрицы элементов, поэлементная обработка
C
DO 40 I = 1, NELMTS
C
C Формирование матриц S и T элементов
IE = I
CALL ELMATR(IE)
C
C Вставка матриц в S; добавление к правой части
CALL ELEMDD(IE)
C
C CONTINUE
C
C Решение полученных уравнений для ансамбля конечных элементов
C
CALL EQSOLV
C
C Печать результирующих значений потенциалов
C
CALL OUTPUT
C
GO TO 950
900 WRITE (KONSOL, 1000)
1000 FORMAT (1X / 1X, 27HCANNOT CONTINUE PROCESSING!)
C
950 STOP
END
C
1 0.000 0.000
2 1.000 0.000
3 0.000 4.000
4 1.000 4.000
5 0.000 4.500
6 3.000 4.500
7 3.000 4.000
C
1 2 3 1.000
2 4 3 1.000
3 4 5 0.000
4 7 5 0.000
4 6 5 0.000
C
5 0.000
7 0.000

```

```

C
C
C*****
C
SUBROUTINE MESHIN
C*****
C
C      Чтение вводного потока данных, состоящего из трех частей:
C      узлов, элементов, фиксированных потенциалов. Признаком
C      конца каждой части является пустая строка
C
C      Узлы:                номер узла,      X, Y.  FORMAT I3,2F10.
C      Элементы:            номера узлов,    SOURCE. 3I3,F10.
C      Потенциалы:          номер узла,      фиксированное значение. I3,F10.
C
C      Все считанные данные повторяются с целью контроля
C
C=====
C      COMMON-блок — одинаковый для всех частей программы
C
C      LOGICAL CONSTR
C      DIMENSION X(50), Y(50), S(50,50)
C      DIMENSION CONSTR(50), RTHDSD(50), POTENT(50)
C      DIMENSION NVTX(3,75), SOURCE(75), SELM(3,3), TELM(3,3),
C      1      INTG(3)
C      COMMON INPUT, KONSOL, IERR, NVE, MAXNOD, MAXELM, NODES,
C      1      NELMTS, X, Y, NVTX, SOURCE, CONSTR, POTENT, RTHDSD,
C      2      SELM, TELM, S, INTG
C=====
C
C      Считывание списка узлов и повторение вводимых строк
C
C      Печать заголовка
C      WRITE (KONSOL, 1140)
C      1140 FORMAT (1X // 8X, 15HINPUT NODE LIST // 3X, 1HN, 8X, 1HX,
C      1      11X, 1HY / 1X)
C
C      Чтение и повторение
C      NODES = 0
C      40 READ (INPUT, 1100) I, XI, YI
C      1100 FORMAT (I3, 2F10.5)
C      IF (I.NE. 0) WRITE (KONSOL, 1105) I, XI, YI
C      1105 FORMAT (1X, I3, 2(2X, F10.5))
C
C      Если нет окончания для узлов (пустой строки), введение узла
C      IF (I.EQ. 0) GO TO 70
C      55 NODES = MAX0 (NODES, I)
C      X(I) = XI
C      Y(I) = YI
C      GO TO 40
C
C      Каков наибольший допустимый номер узла?
C      60 IF (NODES.LE. MAXNOD) GO TO 70
C      WRITE (KONSOL, 1150) NODES, MAXNOD
C      1150 FORMAT (1X, 12HNODE NUMBER, I3, 18H EXCEEDS MAXIMUM =, I3)
C      GO TO 170
C
C      Считывание списка элементов и повторение его
C
C      Печать заголовка
C      70 WRITE (KONSOL, 1160)
C      1160 FORMAT (1X // 6X, 18HINPUT ELEMENT LIST // 3X, 1HI, 5X,
C      1      1HJ, 5X, 1HK, 6X, 6HSOURCE / 1X)

```

```

C
C      Цикл: чтение, вывод и подсчет
C      NELMTS = 0
C      80 READ (INPUT, 1170) INTG, SOURCI
C      1170 FORMAT (3I3, F10.5)
C
C      Проверка конца списка (пустая строка)
C      IF (INTG(1).EQ. 0) GO TO 120
C      WRITE (KONSOL, 1180) INTG, SOURCI
C      1180 FORMAT (1X, I3, 2I6, 2X, F10.5)
C
C      Приемлемо ли число элементов
C      NELMTS = NELMTS + 1
C      IF (NELMTS.LE. MAXELM) GO TO 90
C      WRITE (KONSOL, 1190) NELMTS, MAXELM
C      1190 FORMAT (15H ELEMENT NUMBER, I4, 18H EXCEEDS MAXIMUM =, I3)
C      GO TO 170
C
C      Включение нового элемента в список, переход к получению следующего
C      90 SOURCE(NELMTS) = SOURCI
C      DO 100 M = 1, NVE
C      100   NVTX(M, NELMTS) = INTG(M)
C      GO TO 80
C
C      Чтение и печать списка фиксированных потенциалов
C
C      Печать заголовка
C      120 WRITE (KONSOL, 1200)
C      1200 FORMAT (1X // 4X, 22HINPUT FIXED POTENTIALS // 6X,
C      1      4HNODE, 12X, 5HVALUE / 1X)
C
C      Инициализация узлов
C      DO 130 M = 1, NODES
C      130   POTENT(M) = 0.
C      130   CONSTR(M) = .FALSE.
C
C      Чтение и повторение, проверка на окончание (пустая строка)
C      135 READ (INPUT, 1100) I, XI
C      IF (I.LE. 0) GO TO 150
C      WRITE (KONSOL, 1210) I, XI
C      1210 FORMAT (6X, I3, 9X, F10.5)
C
C      Проверка допустимости номера
C      IF (I.LE. NODES) GO TO 140
C      WRITE (KONSOL, 1150) I, NODES
C      GO TO 170
C
C      Запись величины и переход к следующей
C      140 CONSTR(I) = .TRUE.
C      POTENT(I) = XI
C      GO TO 135
C
C      Возврат к вызывающей программе
C
C      150 IERR = 0
C      GO TO 900
C      170 IERR = 1
C      900 RETURN
C      END

```

```

C
C*****
C
SUBROUTINE SZERO
C
C*****
C
Обнуление глобальной S-матрицы и правой части
C
C=====
C
COMMON-блок — одинаковый для всех частей программы
C
LOGICAL CONSTR
DIMENSION X(50), Y(50), S(50,50)
DIMENSION CONSTR(50), RTHDS(50), POTENT(50)
DIMENSION NVTX(3,75), SOURCE(75), SELM(3,3), TELM(3,3),
1 INTG(3)
COMMON INPUT, KONSOL, IERR, NVE, MAXNOD, MAXELM, NODES,
1 NELMTS, X, Y, NVTX, SOURCE, CONSTR, POTENT, RTHDS,
2 SELM, TELM, S, INTG
C=====
C
Обнуление каждого элемента S
C
DO 20 I = 1, NODES
DO 10 J = 1, NODES
S(I,J) = 0.
10 CONTINUE
20 CONTINUE
C
Обнуление правой части
C
DO 30 I = 1, NODES
RTHDS(I) = 0.
30 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE ELMATR(IE)
C
C*****
C
Построение матричных элементов S и T для одного треугольного
элемента первого порядка. IE = номер элемента
C
C=====
C
COMMON-блок — одинаковый для всех частей программы
C
LOGICAL CONSTR
DIMENSION X(50), Y(50), S(50,50)
DIMENSION CONSTR(50), RTHDS(50), POTENT(50)
DIMENSION NVTX(3,75), SOURCE(75), SELM(3,3), TELM(3,3),
1 INTG(3)
COMMON INPUT, KONSOL, IERR, NVE, MAXNOD, MAXELM, NODES,
1 NELMTS, X, Y, NVTX, SOURCE, CONSTR, POTENT, RTHDS,
2 SELM, TELM, S, INTG

```

```

C=====
C
C
Установка индексов для треугольника
C
I = NVTX(1, IE)
J = NVTX(2, IE)
K = NVTX(3, IE)
C
C
Вычисление T-матрицы элемента
C
AREA = ABS((X(J) - X(I)) * (Y(K) - Y(I)) -
1 (X(K) - X(I)) * (Y(J) - Y(I))) / 2.
C
DO 20 L = 1, NVE
DO 10 M = 1, NVE
10 TELM(L,M) = AREA / 12.
20 TELM(L,L) = 2. * TELM(L,L)
C
C
Вычисление S-матрицы элемента
C
I1 = 1
I2 = 2
I3 = 3
C
DO 30 L = 1, NVE
DO 30 M = 1, NVE
30 SELM(L,M) = 0.
C
DO 50 NVRTEX = 1, 3
CTNG = ((X(J) - X(I)) * (X(K) - X(I)) +
1 (Y(J) - Y(I)) * (Y(K) - Y(I))) / (2. * AREA)
CTNG2 = CTNG / 2.
C
SELM(I2, I2) = SELM(I2, I2) + CTNG2
SELM(I2, I3) = SELM(I2, I3) - CTNG2
SELM(I3, I2) = SELM(I3, I2) - CTNG2
SELM(I3, I3) = SELM(I3, I3) + CTNG2
C
C
Перестановка индексов строк и столбцов
I4 = I1
I1 = I2
I2 = I3
I3 = I4
L = I
I = J
J = K
K = L
50 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C
C*****
C
SUBROUTINE ELEM8D(IE)

```

```

C
C*****
C
C      Включение одиночных матричных элементов S и T (из полей
C      SELM и TELM в общем COMMON-блоке) в глобальную матрицу
C      S. Аргумент IE является номером элемента
C-----
C      COMMON-блок — одинаковый для всех частей программы
C
C      LOGICAL CONSTR
C      DIMENSION X(50), Y(50), S(50,50)
C      DIMENSION CONSTR(50), RTHDSD(50), POTENT(50)
C      DIMENSION NVTX(3,75), SOURCE(75), SELM(3,3), TELM(3,3),
C      1      INTG(3)
C      COMMON INPUT, KONSOL, IERR, NVE, MAXNOD, MAXELM, NODES,
C      1      NELMTS, X, Y, NVTX, SOURCE, CONSTR, POTENT, RTHDSD,
C      2      SELM, TELM, S, INTG
C-----
C
C      Перебор матричных элементов S и T (SELM и TELM) и коррек-
C      тировка глобальной матрицы S и правой части
C
C      DO 60 I = 1,NVE
C      IROW = NVTX(I,IE)
C
C      Строка соответствует фиксированному потенциалу?
C      IF (CONSTR(IROW)) GO TO 50
C
C      Нет, потенциал переменный, просмотр NVE-столбцов
C      DO 40 J = 1,NVE
C      ICOL = NVTX(J,IE)
C
C      Столбец соответствует фиксированному потенциалу?
C      IF (CONSTR(ICOL)) GO TO 30
C
C      Нет, тогда увеличение S и RTHDSD
C      S(IROW,ICOL) = S(IROW,ICOL) + SELM(I,J)
C      RTHDSD(IROW) = RTHDSD(IROW) + TELM(I,J) * SOURCE(IE)
C      GO TO 40
C
C      Да, тогда увеличение только правой части
C      30      CONTINUE
C      RTHDSD(IROW) = RTHDSD(IROW) + TELM(I,J) * SOURCE(IE)
C      - SELM(I,J) * POTENT(ICOL)
C      1
C      40      CONTINUE
C      GO TO 60
C
C      Установка глобальной S-матрицы и RTHDSD для заданного узла
C      50      CONTINUE
C      S(IROW,IROW) = 1.
C      RTHDSD(IROW) = POTENT(IROW)
C
C      60      CONTINUE
C
C      Все выполнено — возврат в вызывающую программу
C      RETURN,
C      END

```

```

C
C*****
C
C      SUBROUTINE OUTPUT
C
C*****
C
C      Печать результатов на устройстве вывода KONSOL
C-----
C      COMMON-блок — одинаковый для всех частей программы
C
C      LOGICAL CONSTR
C      DIMENSION X(50), Y(50), S(50,50)
C      DIMENSION CONSTR(50), RTHDSD(50), POTENT(50)
C      DIMENSION NVTX(3,75), SOURCE(75), SELM(3,3), TELM(3,3),
C      1      INTG(3)
C      COMMON INPUT, KONSOL, IERR, NVE, MAXNOD, MAXELM, NODES,
C      1      NELMTS, X, Y, NVTX, SOURCE, CONSTR, POTENT, RTHDSD,
C      2      SELM, TELM, S, INTG
C-----
C
C      Печать узлов и значений потенциалов
C
C      WRITE (KONSOL,1000) (I, X(I), Y(I), POTENT(I),
C      1      I = 1, NODES)
C      1000 FORMAT (1X,11X,14HFINAL SOLUTION // 3X,1H1,8X,1HX,
C      1      9X,1HY,7X,9HPOTENTIAL // (1X,13,2X,F10.5,
C      2      F10.5,3X,F10.5))
C
C      RETURN
C      END

```

Глава 2

Представление электромагнитных полей

2.1. Уравнения Максвелла

Задачи электромагнетизма занимают в некотором смысле привилегированное положение в технике и физике, так как поведение электромагнитного поля подчиняется законам, которые могут быть выражены очень кратко уравнениями, связанными с именем Дж. К. Максвелла.

К числу основных переменных, входящих в уравнения Максвелла, относятся следующие пять векторов и один скаляр:

напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ (В/м),

напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ (А/м),

электрическая индукция $\mathbf{D}$ (Кл/м²),

магнитная индукция $\mathbf{B}$ (Тл),

плотность электрического тока $\mathbf{J}$ (А/м²),

плотность электрического заряда ρ (Кл/м³).

Уравнения Максвелла могут быть представлены в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.4)$$

К этим дифференциальным соотношениям добавляются *материальные уравнения*

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

соответствующие пренебрежению пространственной и временной дисперсией, анизотропией и характеризующие макроскопические свойства среды посредством диэлектрической проницаемости ϵ , магнитной проницаемости μ и удельной проводимости σ . Величины ϵ , μ и σ не обязательно являются константами; так, например, в случае ферромагнитных материалов зависимость $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$ может быть в высшей степени нелиней-

ной (см. гл. 5). Более того, в анизотропных средах, в которых векторы индукции отличаются по направлениям от соответствующих напряженностей полей, величины ϵ , σ и μ должны иметь размерность тензоров 2-го ранга.

Для свободного пространства при использовании единиц СИ

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Данное значение μ_0 отражает тот фундаментальный факт, что диэлектрическая и магнитная проницаемости в вакууме связаны соотношением

$$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

со скоростью света c в вакууме. Наряду с величиной, определяемой соотношением (2.7), ток $\mathbf{J}$ может содержать составляющую, связанную с движением внешних зарядов (внешний ток).

К уравнениям (2.1)–(2.4) следует добавить соотношение, выражающее закон сохранения заряда

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

Это *уравнение непрерывности* следует из уравнений (2.2), (2.3), в чем можно убедиться, применяя операцию дивергенции к уравнению (2.2) и подставляя в него выражение (2.3) для $\operatorname{div} \mathbf{D}$. В случае постоянного тока уравнение (2.8) принимает вид: $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Это соотношение является зачастую удовлетворительной аппроксимацией и для переменных полей в хороших проводниках. Значительный изменяющийся во времени ток можно объяснить высокой плотностью дрейфующих электронов, нейтрализуемых неподвижными ионами, расположенными в решетке проводника.

2.1.1. Интегральные соотношения

Существует математически эквивалентная интегральная форма уравнений Максвелла (2.1)–(2.4). Рассмотрим замкнутый контур C , на который натянута поверхность S (рис. 2.1). Интегрируя по поверхности S уравнения (2.1), (2.2) и воспользовавшись формулой Стокса, представим первые два уравнения Максвелла в виде

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad (2.9)$$

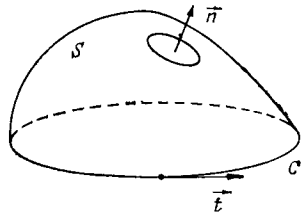
$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S},$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS, \quad d\mathbf{l} = \mathbf{t} dl. \quad (2.10)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности, $\mathbf{t}$ — единичный вектор, касательный к контуру C .

Уравнения (2.9), (2.10) соответствуют закону Фарадея и закону Ампера с добавкой к последнему вклада от максвеллова тока смещения.

Интегрируя уравнения (2.3), (2.4) по произвольной замкнутой поверхности S' , получаем с помощью формулы Остроградского — Гаусса



$$\oint_{S'} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \rho d\Omega, \quad (2.11)$$

$$\oint_{S'} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (2.12)$$

Рис. 2.1. Контур C и «натяннутая» на этот контур поверхность S' .

Эти уравнения утверждают, что интеграл от магнитной индукции $\mathbf{B}$ по любой замкнутой поверхности S' равен нулю, тогда как соответствующий интеграл от $\mathbf{D}$ равен полному заряду в объеме Ω , охватываемом поверхностью S' .

2.1.2. Запись в комплексной форме

Во многих задачах изучаются установившиеся состояния, возникающие при периодическом воздействии на данную систему. В таких случаях переменные величины удобно представлять в комплексной форме. При этом все переменные величины представляются комплексными величинами.

Например, комплексная амплитуда электрического поля имеет вид: $E_p = E_r + iE_i$. Соответствующее физическое, изменяющееся во времени поле равно вещественной части величины $E_p \cdot \exp(i\omega t)$, где ω — угловая частота синусоидального возбуждения. Таким образом, частное дифференцирование по времени приводит к умножению на величины $\pm i\omega$. Будем интересоваться лишь слагаемыми, пропорциональными $\exp(+i\omega t)$. При этом оператор дифференцирования $\partial/\partial t$ может быть заменен коэффициентом $i\omega$. Например, уравнение (2.1) приводится к виду

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}. \quad (2.13)$$

Выбором начала отсчета времени можно добиться того, чтобы в любой из точек по крайней мере одна из компонент E_p оказалась чисто вещественной величиной; пусть этой компонентой будет E_{p1} . Соответственно физическая, изменяющаяся во времени компонента поля равна $E_{p1} \cos(\omega t)$. В любом другом месте E_{p1} будет иметь в общем случае комплексное значение,

соответствующее некоторому фазовому сдвигу Φ_1 , так что для компоненты E_{p1} получаем

$$E_{p1} = |E_{p1}| \exp(i\Phi_1). \quad (2.14)$$

В данной точке физическое поле равно $E_{p1} \cos(\omega t + \Phi_1)$. Эта методика анализа полей является развитием комплексного анализа одномерных цепей.

2.1.3. Граничные условия

Законы, устанавливающие поведение полей на границах, где резко изменяются свойства среды, вытекают из требования, чтобы на поверхностях и контурах, охватывающих границы, были справедливыми уравнения Максвелла в интегральной форме.

Доказательства того, что уравнения (2.9) — (2.12) приводят к ряду условий на поверхностях раздела сред, относятся к числу стандартных упражнений в теории электромагнетизма. Эти условия следующие:

- 1) Тангенциальная компонента поля $\mathbf{E}$ непрерывна.
- 2) Тангенциальная компонента поля $\mathbf{H}$ разрывна; величина скачка равна плотности поверхностного тока $\mathbf{J}_s$.
- 3) Нормальная компонента вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ непрерывна.
- 4) Нормальная компонента вектора электрической индукции терпит разрыв; при этом величина скачка равна плотности поверхностного заряда.

Поверхностные ток и заряд могут возникать лишь тогда, когда один из материалов является хорошим проводником.

При высоких частотах имеет место известный поверхностный эффект, согласно которому ток протекает главным образом вблизи поверхности проводника. Так называемая глубина скин-эффекта в обычных проводниках часто является очень малой, поэтому с достаточной точностью можно рассматривать это явление как чисто поверхностное.

Таким образом, известные правила поведения переменных электромагнитных полей на границах «хороших» проводников аппроксимируются условиями на границах «идеальных» проводников. Переменное электромагнитное поле не проникает внутрь проводника, поэтому должны выполняться следующие граничные условия:

- 1) Электрическое поле на поверхности проводника нормально к поверхности и поддерживается поверхностным зарядом $\rho_s = D_n$.
- 2) Магнитное поле на поверхности проводника тангенциально к поверхности и поддерживается поверхностным током $\mathbf{J}_s = \mathbf{H}_t$.

2.1.4. Причина и следствие

Зачастую бывает нелегко различить причину и следствие электромагнитных явлений в рамках уравнений Максвелла, которые, как было сказано, должны давать полное описание электромагнитных явлений.

Конечно, нетрудно увидеть, что если везде задан переменный ток J , то может быть полностью определено и поле. Однако это лишь одна из возможных, особенно простая ситуация. Другие «причины» электромагнитных явлений часто связаны с наложением условий на границах. Примером может служить приложение напряжения к системе электродов. Подобные случаи будут обсуждаться в книге по мере рассмотрения соответствующих задач.

2.2. Уравнения для потенциалов

Во многих случаях имеют место значительные упрощения как понятийного характера, так и в расчетах, если поля E и H представляются функциями потенциалов. Хорошо известно, что статическое электрическое поле представляется функцией скалярного потенциала

$$E = -\nabla V, \quad (2.15)$$

где потенциал V в свободных от зарядов областях должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0. \quad (2.16)$$

Это лишь один из возможных вариантов; ниже обсуждается общий случай.

В теории векторного исчисления доказывается, что ротор градиента любой скалярной функции и дивергенция ротора любой векторной функции равняются нулю. Поэтому легко проверить, что выражения

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (2.17)$$

$$B = \text{rot } A \quad (2.18)$$

определяют E и B через скалярный V и векторный A потенциалы, которые автоматически удовлетворяют двум из четырех уравнений Максвелла, а именно уравнениям (2.1) и (2.4).

Очевидно, здесь имеется некоторый элемент произвола в представлении E и B , так как добавление к A градиента любой скалярной функции координат не влияет на соотношение (2.18). Детальное исследование показывает, что вследствие отмеченного произвола $\text{div } A$ может быть определена по же-

ланию. Обычно предполагается, что выполняются условия Лоренца

$$\text{div } A = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Могут быть выбраны и другие условия, например условие Кулона $\text{div } A = 0$. Однако условие Лоренца обладает тем достоинством, что оно ведет к простой и симметричной системе уравнений, когда оставшаяся пара уравнений Максвелла (2.2) и (2.3) также записывается через потенциалы V и A . В случае линейной однородной среды эти уравнения принимают вид

$$\Delta V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.20)$$

$$\Delta A - \mu\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J. \quad (2.21)$$

2.2.1. Решения для запаздывающих потенциалов

В уравнениях (2.20) и (2.21) легко узнать волновые уравнения, которые являются обобщениями уравнения Пуассона с источниками в виде заряда и тока соответственно. Нетрудно показать, что вклады в величины V и A от элемента объема $d\Omega$ можно записать в виде так называемых запаздывающих потенциалов

$$dV = \frac{[\rho] d\Omega}{4\pi\epsilon r_1}, \quad (2.22)$$

$$dA = \frac{\mu [J] d\Omega}{4\pi r_1}. \quad (2.23)$$

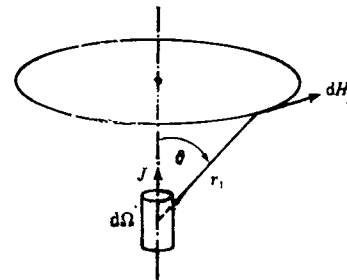


Рис. 2.2. Геометрия и обозначения, используемые при формулировке закона Био — Савара (формула (2.25)).

Здесь r_1 — величина радиус-вектора из точки R , в которой определяется потенциал, до рассматриваемого элемента объема. Квадратные скобки означают, что ρ и J должны быть определены во времени на $r_1(\mu\epsilon)^{1/2}$ раньше, чем то время, когда вычисляются V и A . Запаздывание соответствует времени, необходимому для передачи электромагнитного возмущения от источника к точке R .

Отметим, что в статических ситуациях потенциалы V и A не связаны. Уравнения (2.17) — (2.21) определяют поля E и B , которые теперь являются полностью независимыми. Соотношения (2.22) и (2.23) соответствуют в этом случае законам

Кулона и Био — Савара

$$dE_r = \frac{\rho d\Omega}{4\pi\epsilon r_1^2}, \quad (2.24)$$

$$dH_\varphi = \frac{J d\Omega \sin \theta}{4\pi r_1^2}. \quad (2.25)$$

Геометрия для данного случая представлена на рис. 2.2. Формулы (2.24), (2.25) пригодны и в так называемом квазистатическом приближении, когда частота невелика и можно пренебречь током смещения, а также временем запаздывания.

2.2.2. Скалярный магнитный потенциал

Другим полезным представлением потенциала является соответствующее уравнению (2.15) выражение для магнитного поля:

$$\mathbf{H} = -\nabla P. \quad (2.26)$$

Здесь P — скалярный магнитный потенциал. Поскольку ротор градиента любой скалярной величины равен нулю, из уравнения (2.26) получаем $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. Из уравнения Максвелла (2.2) при этом следует, что

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0. \quad (2.27)$$

Ясно, что представление магнитного поля в виде градиента скалярного потенциала справедливо только в области, свободной от токов, и при достаточно низких частотах, когда можно пренебречь током смещения. Такая аппроксимация часто оказывается очень полезной.

Основное уравнение, определяющее скалярный магнитный потенциал, выводится из уравнения (2.4), определяющего соленоидальность вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$\text{div}(\mu \nabla P) = 0. \quad (2.28)$$

2.2.3. Граничные условия для потенциалов

В этой книге мы будем иметь дело с поведением полей в подобластях, «конечных элементах», примыкающих к другим подобным областям. Иногда будет встречаться резкое (скачкообразное) изменение свойств материалов при переходе от одного элемента к другому. Правила поведения электрического и магнитного полей на таких границах, являющиеся следствиями уравнений Максвелла, были приведены выше. Теперь необходимо установить соответствующие правила для потенциалов V и A .

Обычно V и компоненты $\mathbf{A}$ будут считаться непрерывными на таких границах. Из фундаментальных соотношений (2.17) и (2.18), определяющих поля через потенциалы, видно, что это условие является достаточным, чтобы гарантировать непрерывность тангенциальной компоненты поля $\mathbf{E}$ и нормальной компоненты поля $\mathbf{B}$, как требуют граничные условия.

Также ясно, что если имеют место скачки μ и ϵ , то будут возникать разрывы нормальных производных V и $\mathbf{A}$. Это является следствием граничных условий для нормальной компоненты $\mathbf{D} = -\epsilon(\nabla V + \partial \mathbf{A}/\partial t)$ и тангенциальной компоненты $\mathbf{H} = (\text{rot } \mathbf{A})/\mu$, например условий непрерывности в случае отсутствия поверхностных токов и зарядов.

Когда будут рассматриваться «конечные элементы» и решаться задача нахождения поля для объединенного ансамбля элементов, условия непрерывности V и $\mathbf{A}$ на границах между элементами будут использованы в качестве условий для пробных функций. И это будет делаться до того, как будут наложены любые другие ограничения.

Возникает вопрос: необходимо ли принимать какие-либо дальнейшие меры по отношению к пространственным производным от V и $\mathbf{A}$, чтобы выполнялись граничные условия при построении пробных функций для потенциалов? Оказывается, что на пробные функции всегда накладываются ограничения, если функции выбраны таким образом, что везде в пределах отдельных элементов, включая их границы, аппроксимируются уравнения Максвелла или их вариационные эквиваленты. И поскольку сами граничные условия являются всецело следствиями уравнений Максвелла, то требуемое поведение нормальных производных на границах получается автоматически. Оно будет выполнено с тем же порядком точности, который достигается для полей в объеме.

2.2.4. Физические интерпретации

Физическая интерпретация скалярного потенциала в статических случаях хорошо известна и проста. Проводники всегда имеют постоянный потенциал, а разность потенциалов между любыми двумя проводниками соответствует приложенному напряжению. Потенциал V всегда определен лишь с точностью до постоянной. Неопределенность устраняется выбором некоторой точки, где потенциал полагают равным нулю.

Перемещение заряда q из точки X_1 с потенциалом V_1 в точку X_2 с потенциалом V_2 требует расхода энергии $q(V_2 - V_1)$ независимо от пути между X_1 и X_2 . Эквипотенциальные поверхности образуют ортогональную систему с силовыми линиями электрической индукции. Аналогичными свойствами обладает и магнитный скалярный потенциал.

Интерпретация потенциалов A и V в случае изменяющихся во времени полей не является столь простой. Для истолкования V в случае переменных полей заметим, что работа, выполненная при перемещении заряда q из X_1 в X_2 , определяется выражением

$$W_{21} = -q \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = q \int_{x_1}^{x_2} \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d\mathbf{l}, \quad (2.29)$$

из которого следует формула

$$W_{21} = q(V_2 - V_1) + q \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (2.30)$$

Таким образом, наличие второго слагаемого в правой части выражения (2.30) приводит к зависимости W_{21} от пути интегрирования. Однако вклад от потенциала V имеет *консервативный* характер.

Полезные свойства векторного потенциала $\mathbf{A}$ можно получить, если применить формулу Стокса (см., например, Рамо, Уиннери и ван Дюзер, [1]) к уравнению, определяющему магнитный поток через поверхность S :

$$\Phi = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) dS. \quad (2.31)$$

При этом уравнение (2.31) преобразуется к виду

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad (2.32)$$

где C — замкнутый контур, ограничивающий данную поверхность S . Таким образом, интеграл от $\mathbf{A}$ по замкнутому контуру равен магнитному потоку, пронизывающему этот контур.

Одно из свойств вектора $\mathbf{A}$ можно получить из формулы (2.23). Она показывает, что вклад элемента тока $\mathbf{J} d\Omega$ в векторный потенциал $d\mathbf{A}$ имеет то же направление, что и плотность тока $\mathbf{J}$. Поэтому для многих задач с симметричной геометрией векторный потенциал имеет лишь одну отличную от нуля компоненту.

2.3. Стационарные функционалы для потенциалов

В гл. 1 было показано, что энергия электрического поля, удовлетворяющего уравнению Лапласа, оказывается меньше, чем при всех других возможных распределениях поля, удовлетворяющих условиям Дирихле для данной задачи. Исходя из принципа минимума энергии, утверждалось, что функционал

$$F = \frac{1}{2} \int (\nabla u)^2 dS, \quad (2.33)$$

в котором интегрирование производится по всей области определения решения двумерной задачи, должен быть наименьшим, когда u совпадает с решением уравнения Лапласа для потенциала. Этот вариационный принцип использовался для объединения кусочно-планарных функций двух пространственных переменных, которое при данной линейной аппроксимации определяло наилучшее приближение к точному решению. Такая процедура типична для решения задач электромагнетизма методом конечных элементов.

Оказывается, что для любого дифференциального уравнения в частных производных, описывающего электромагнитный процесс, возможно найти соответствующий функционал F . Этот функционал выражается либо через электрическое и магнитное поля, либо через потенциалы. Как правило, он обладает свойством стационарности для совокупности функций, удовлетворяющих заданным условиям на границах, включающей точное решение задачи.

Методы решения задач математической физики, в которых используются экстремальные свойства определенных функционалов, составляют предмет вариационного исчисления. Сведения о них можно найти во многих книгах, например Райли [2] или Морса и Фешбаха [3]. Излагаемые далее вариационные методы будут обсуждены применительно к конкретным задачам электромагнетизма.

2.3.1. Неоднородное уравнение Гельмгольца

Следуя методам, изложенным в гл. 1, рассмотрим уравнение, которое называется неоднородным уравнением Гельмгольца:

$$\text{div}(p \nabla u) + k^2 u = g. \quad (2.34)$$

В этом уравнении неизвестной величиной является скалярный потенциал u — некоторая функция координат $u(x, y, z)$. Материальные свойства рассматриваемой среды определяются некоторой функцией $p(x, y, z)$. Величина k^2 не зависит от координат и может быть известной или определяться условиями задачи, а $g(x, y, z)$ — заданная функция источника. На замкнутой поверхности S заданы граничные условия: либо условия Дирихле, либо однородное условие Неймана, скажем на S_1 задается u (условие Дирихле), тогда как на S_2 задано $\mathbf{n} \nabla u = 0$ (однородное условие Неймана). Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный к поверхности S .

Приведенная постановка задачи является довольно формальной. Она, однако, оправдывается тем, что общие уравнения, подобные (2.34), можно использовать для численного решения на ЭВМ целого ряда различных физических задач. Одним из важных качеств современного инженера является

умение приспособливать конкретные задачи к подобным универсальным программам, входящим в библиотеки программ для ЭВМ.

Приведем некоторые примеры частных случаев уравнения (2.34), встречающихся на практике.

1. Уравнение Лапласа

$$\operatorname{div}(\nabla u) = 0 \quad (2.35)$$

описывает задачу электростатики, рассмотренную в гл. 1, и получается из уравнения (2.20) в случае установившегося состояния и отсутствия зарядов. В качестве граничных условий будут использоваться условия типа Дирихле (на граничных поверхностях устанавливается потенциал u).

2. Уравнение Пуассона

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = -\rho \quad (2.36)$$

моделирует более сложную задачу для потенциала, когда диэлектрическая проницаемость ϵ может быть произвольной функцией координат. Заданное пространственное распределение заряда ρ видоизменяет распределение потенциала, которое имело бы место для простого случая, описываемого уравнением Лапласа (2.35). На границе снова будут, как правило, использоваться условия Дирихле.

3. Двумерное уравнение Гельмгольца

$$\Delta_{\perp} H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (2.37)$$

моделирует поведение поперечно-электрических (TE) волн в волноводах. Формулировка волноводной задачи подробно обсуждается в разд. 2.7. Отметим лишь, что $\Delta_{\perp}$ — поперечная часть оператора Лапласа

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

в декартовой (прямоугольной) системе координат, а k_c — критическое волновое число, определяемое заданными краевыми условиями на границе. Краевые условия соответствуют однородному условию Неймана на поверхности волновода.

2.3.2. Функционал для уравнения Гельмгольца

Возвращаясь к уравнению (2.34), попробуем найти ответ на вопрос, может ли быть найден функционал $F(U)$, обладающий требуемыми стационарными свойствами при заданных краевых условиях. Разумеется, отыскание такого функционала тесно связано с использованием экстремальных свойств точного решения при аппроксимациях конечными

элементами, как это было сделано на простых примерах в гл. 1.

Покажем, что выражение

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [p(\nabla U)^2 - k^2 U^2 + 2gU] d\Omega, \quad (2.38)$$

где интегрирование производится по всему пространству задачи, определяет требуемый функционал при условии, что функции $U(x, y, z)$ удовлетворяют граничным условиям Дирихле (U задано на части S_1 замкнутой граничной поверхности S).

Необходимо отметить, что однородные условия Неймана не налагают каких-либо ограничений на U . Оказывается (и это важно), что никаких подобных ограничений не требуется. В вариационном анализе это типичная ситуация. Для того чтобы данный функционал $F(U)$ достигал экстремальных значений для точного решения u , на пробные функции должны быть наложены некоторые краевые условия, подобные использованному здесь ограничению Дирихле. Такое ограничение называется *главным краевым условием*. С другой стороны, однородное условие Неймана ($n \nabla U = 0$) играет роль *естественного краевого условия*. Функции, удовлетворяющие требованию экстремальности F , автоматически удовлетворяют и однородному условию Неймана на S_2 .

Для доказательства этого утверждения подставим в функционал (2.38) функцию

$$U = u + \theta h, \quad (2.39)$$

где u — точное решение уравнения (2.34) с граничными условиями Дирихле на S_1 , θ — число, изменяющееся от малого отрицательного значения до малого положительного значения, h — произвольная функция, единственным ограничением для которой является требование обращения в нуль на поверхности S_1 . Другими словами, функция $u + \theta h$ должна быть ограничена классом допустимых функций, удовлетворяющих краевому условию задачи Дирихле. Иллюстрация этого случая для одномерной задачи приведена на рис. 2.3.

Исследуем поведение функционала (2.38), когда вместо истинного решения уравнения (2.34) в него подставляется функция $u + \theta h$. Имеем

$$p[\nabla(u + \theta h)]^2 = p(\nabla u)^2 + 2\theta p(\nabla u)(\nabla h) + \theta^2 p(\nabla h)^2, \quad (2.40)$$

$$k^2(u + \theta h)^2 = k^2 u^2 + 2\theta k^2 u h + \theta^2 k^2 h^2, \quad (2.41)$$

$$2g(u + \theta h) = 2gu + 2\theta gh. \quad (2.42)$$

Следовательно,

$$F(u + \theta h) = F(u) + \theta \int_{\Omega} [p(\nabla u)(\nabla h) - k^2 u h + g h] d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \theta^2 \int_{\Omega} [p(\nabla h)^2 - k^2 h^2] d\Omega. \quad (2.43)$$

Очевидно, что функционал (2.38) достигает экстремального значения при совпадении U с точным решением, если интеграл в правой части выражения (2.43), который умножается

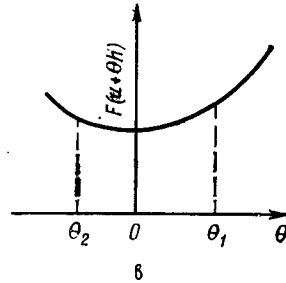
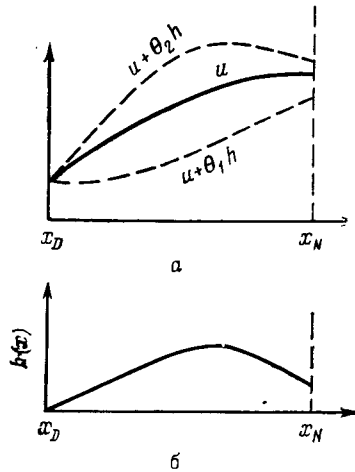


Рис. 2.3. а) Пробная функция $u(x) + \theta h(x)$, варьируемая относительно истинного решения u и подчиненная граничным условиям Дирихле при $x = x_D$ и однородным условиям Неймана при $x = x_N$. б) Соответствующая произвольная функция $h(x)$, не ограниченная в точке x_N . в) Зависимость функционала F от параметра θ .

на θ , обращается в нуль. Поэтому рассмотрим так называемую первую вариацию функционала F

$$\delta F = \theta \int_{\Omega} [p(\nabla u)(\nabla h) - k^2 u h + g h] d\Omega. \quad (2.44)$$

Вследствие теоремы Остроградского — Гаусса для любой векторной функции $\mathbf{A}$ справедливо соотношение

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega, \quad (2.45)$$

так что

$$\oint_S h p(\nabla u) d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(h p \nabla u) d\Omega = \int_{\Omega} [p(\nabla h)(\nabla u) + h \operatorname{div}(p \nabla u)] d\Omega. \quad (2.46)$$

Отсюда получаем выражение

$$\int_{\Omega} p(\nabla h)(\nabla u) d\Omega = \oint_S h p(\nabla u) d\mathbf{S} - \int_{\Omega} h \operatorname{div}(p \nabla u) d\Omega, \quad (2.47)$$

которое можно использовать для преобразования подынтегрального выражения в формуле (2.44). Для первой вариации F получаем:

$$\delta F = \theta \oint_S h p(\nabla u) d\mathbf{S} - \theta \int_{\Omega} h [\operatorname{div}(p \nabla u) + k^2 u - g] d\Omega. \quad (2.48)$$

Второе слагаемое правой части этого выражения содержит множитель $[\operatorname{div}(p \nabla u) + k^2 u - g]$, который равен нулю во всех точках объема Ω , поскольку по определению u является решением уравнения (2.34).

Таким образом, несмотря на то что $h(x, y, z)$ — произвольная функция в пределах Ω , объемный интеграл в правой части выражения (2.48) тождественно равен нулю вследствие равенства нулю подынтегрального выражения в каждой точке области Ω .

Теперь рассмотрим первый член в правой части (2.48). Это интеграл по замкнутой поверхности S , включающей S_1 и S_2 . Вариация U была ограничена функциями, которые удовлетворяют главному краевому условию (условию Дирихле). Иными словами, функция h равна нулю везде на поверхности S_1 . Нетрудно также видеть, что множитель $(\nabla u) d\mathbf{S}$ пропорционален $\mathbf{n} \nabla u$ на поверхности S , и эта величина равна нулю на S_2 по определению.

Таким образом, показано, что первая вариация δF функционала (2.38) равна нулю. Следовательно, функционал F достигает экстремума для истинного решения неоднородного уравнения Гельмгольца (2.34) при заданных краевых условиях и любых возмущениях, удовлетворяющих краевым условиям Дирихле для рассматриваемой задачи. Однородное краевое условие Неймана является естественным краевым условием, которое не должно налагаться на пробную функцию.

После построения требуемого функционала область определения решения разбивается на элементы и в качестве приближения к точному решению принимается кусочно-планарная функция. Такая функция сама по себе никогда не может представить истинное решение, по крайней мере когда кусочные элементы имеют конечные размеры. Однако аппроксимация производится таким образом, чтобы обеспечить экстремум функционала F . Очевидно, что экстремальное значение $F(u + \theta h)$, отличающееся теперь от значения $F(u)$ слагаемым, пропорциональным θ^2 , является намного более точной оценкой F , чем потенциал $u + \theta h$ оценкой u . Функционал F

часто связан с такими параметрами, как, например, энергия, которые и необходимо определять инженеру. Именно здесь проявляются преимущества вариационного подхода.

2.3.3. Функционалы для уравнений с другими потенциалами

Уравнение (2.34) охватывает большое число практических ситуаций, но область его применения ограничена скалярной переменной и линейной системой. Оказывается, что функционалы для векторных и нелинейных аналогов этого уравнения незначительно отличаются от уже полученных выражений. В качестве примера рассмотрим волновое уравнение (2.21) для $\mathbf{A}$ в комплексной форме для случая синусоидальных колебаний с частотой ω :

$$\Delta \mathbf{A} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}. \quad (2.49)$$

Это уравнение можно рассматривать как три скалярных уравнения вида (2.34), в которых u отождествляется с одной из компонент векторного потенциала, скажем A_i , а $g = -\mu J_i$. Тогда мы могли бы ожидать, что сможем применить результаты, полученные для скалярного неоднородного уравнения Гельмгольца, непосредственной подстановкой $p = 1$ и $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. Однако здесь необходима осторожность, так как воздействие оператора Лапласа на векторную переменную имеет некоторые особенности. Если в некоторой криволинейной системе координат $A_\xi \mathbf{e}_\xi$ — компонента вектора $\mathbf{A}$, направленная вдоль одной из осей координат, то выражения $\Delta(A_\xi \mathbf{e}_\xi)$ и $(\Delta A_\xi) \mathbf{e}_\xi$, вообще говоря, не совпадают, поскольку в первом из них оператор Δ действует также и на единичный вектор $\mathbf{e}_\xi$, который может сильно изменяться по направлению с изменением пространственных координат. Типичный пример этого имеет место в цилиндрических полярных координатах (r, φ, z) , где единичные векторы $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$ являются функциями r и φ . Однако единичный вектор $\mathbf{e}_z$ в этой системе координат является постоянным, поэтому $\Delta(A_z \mathbf{e}_z)$ и $(\Delta A_z) \mathbf{e}_z$ совпадают.

Конечно, подобных проблем в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) вообще не возникает. Что касается цилиндрической системы координат, то действие оператора Лапласа на вектор в этой системе координат следует представить в виде

$$\Delta \mathbf{A} = \left(\Delta A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} A_r \right) \mathbf{e}_r + \left(\Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} A_\varphi \right) \mathbf{e}_\varphi + (\Delta A_z) \mathbf{e}_z, \quad (2.50)$$

где предусматривается, что оператор

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.51)$$

действует только на скалярные величины.

Выражение $1/2 p (\nabla u)^2$ в функционале (2.38) часто соответствует плотности энергии. Например, в простом электростатическом случае (уравнение (2.36)) коэффициент p равен диэлектрической проницаемости ϵ , а $-\nabla u$ совпадает с вектором электрического поля $\mathbf{E}$. Для плотности энергии электрического поля $\mathcal{E}$ в этом случае имеем выражение

$$\mathcal{E}_E = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2. \quad (2.52)$$

Если среда, в которой действует электрическое поле, нелинейна, так что ϵ является функцией $\mathbf{E}$, то можно показать, что плотность энергии в этом случае равна

$$\mathcal{E}_E = \int_0^{\mathbf{E}} \epsilon(\mathbf{E}) \mathbf{E} d\mathbf{E}. \quad (2.53)$$

Обычно предполагают, что если слагаемое в функционале, характеризующее плотность энергии в уравнении (2.38), определено для линейной задачи, то его замена нелинейным эквивалентом будет давать правильный функционал для нелинейного варианта этой задачи.

2.4. Стационарные функционалы для полей

В некоторых случаях, особенно при исследованиях высокочастотных полей, полезно рассмотреть функционалы непосредственно от полей, а не от потенциалов. Типичным примером может служить задача определения высокочастотных полей в резонаторе. Будем надеяться, что нам удастся найти функционалы, которые можно выразить через плотности электрической или магнитной энергий $1/2 \epsilon \mathbf{E}^2$ и $1/2 \mu \mathbf{H}^2$ соответственно. Рассмотрим линейные уравнения Максвелла в комплексной форме, в которых не учитывается ток $\mathbf{J}$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (2.54)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.55)$$

В этой комплексной системе уравнений μ и ϵ также могут быть комплексными, допуская возможность учета тока $\mathbf{J}$, определяемого законом Ома:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.56)$$

В этом легко убедиться, записав более общее уравнение Максвелла, в котором, в частности, учитывается ток, соответствующий (2.56)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + i\omega \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.57)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad (2.58)$$

где комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\hat{\epsilon} = \epsilon - (i\sigma/\omega) \quad (2.59)$$

является результатом учета тока.

Система уравнений (2.54), (2.55) может быть преобразована к виду, соответствующему исключению либо магнитного, либо электрического полей:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) = \omega^2 \mu \mathbf{H}, \quad (2.60)$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \right) = \omega^2 \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.61)$$

Таким образом, в зависимости от условий задачи можно решать уравнения либо для магнитного, либо электрического полей. Уравнения (2.60), (2.61) допускают рассмотрение случаев неоднородной среды, когда μ и ϵ являются функциями координат.

Изучим сначала уравнение (2.60). Утверждается, что в этом случае функционал

$$F(\mathbf{H}') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\omega^2 \epsilon} (\operatorname{rot} \mathbf{H}')^2 - \mu (\mathbf{H}')^2 \right] d\Omega \quad (2.62)$$

достигает экстремума при $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — решение уравнения (2.60), если пробные функции $\mathbf{H}'$ удовлетворяют определенным граничным условиям, которые будут определены ниже. Представим $\mathbf{H}'$ в виде суммы $\mathbf{H}$ и некоторого вектора $\mathbf{h}$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{h}. \quad (2.63)$$

Тогда линейное по $\mathbf{h}$ слагаемое в выражении для $F(\mathbf{H} + \mathbf{h})$, т. е. первая вариация F , определяется формулой

$$\delta F = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\omega^2 \epsilon} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) (\operatorname{rot} \mathbf{h}) - \mu \mathbf{H} \mathbf{h} \right] d\Omega. \quad (2.64)$$

Используя тождество для векторного произведения $[\mathbf{AB}]$

$$\operatorname{div} [\mathbf{AB}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (2.65)$$

и полагая $\mathbf{A} = (\operatorname{rot} \mathbf{H})/\omega^2 \epsilon$, $\mathbf{B} = \mathbf{h}$, получим

$$\frac{1}{\omega^2 \epsilon} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) (\operatorname{rot} \mathbf{h}) = \mathbf{h} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\omega^2 \epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\omega^2 \epsilon} [\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{H}] \right). \quad (2.66)$$

Соответственно выражение (2.64) принимает вид

$$\delta F = \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{h} \left[\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\omega^2 \epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) - \mu \mathbf{H} \right] + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\omega^2 \epsilon} [\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{H}] \right) \right\} d\Omega. \quad (2.67)$$

Поскольку $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнению (2.60), первое слагаемое в фигурных скобках в правой части этого выражения обращается в нуль при произвольных функциях $\mathbf{h}$. Ко второму слагаемому в правой части (2.67) можно применить теорему Остроградского — Гаусса, в результате чего для первой вариации F имеем

$$\delta F = \oint_S \frac{1}{\omega^2 \epsilon} [\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{H}] d\mathbf{S}, \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS. \quad (2.68)$$

Используя уравнение (2.55), получаем для δF :

$$\delta F = \oint_S \frac{i}{\omega} \mathbf{n} [\mathbf{h} \mathbf{E}] dS. \quad (2.69)$$

С помощью правила циклической перестановки векторов в смешанном произведении можно преобразовать выражение (2.69) к виду

$$\delta F = \frac{i}{\omega} \oint_S \mathbf{h} [\mathbf{E} \mathbf{n}] dS, \quad (2.70)$$

$$\delta F = \frac{i}{\omega} \oint_S \mathbf{E} [\mathbf{n} \mathbf{h}] dS. \quad (2.71)$$

Ясно, что если тангенциальная компонента электрического поля отлична от нуля на поверхности S , то $\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{h}$ можно выбрать так, чтобы $[\mathbf{n} \mathbf{h}]$ обращалось в нуль. Другая возможность заключается в том, что в соответствии с граничным условием на поверхности идеального проводника может обращаться в нуль тангенциальная компонента электрического поля. В этом случае в силу уравнения (2.70) δF обращается в нуль при любых возмущениях $\mathbf{h}$. Таким образом, при любом кусочном наложении на поверхности S этих двух условий функционал F будет стационарным.

На практике часто встречаются случаи, когда поперечное поле $\mathbf{H}$ на апертуре является источником возбуждения поля во всем замкнутом объеме. Заметим, что, к счастью, нет необходимости знать нормальную компоненту поля на

апертуре, ибо рассматриваемое с точки зрения причины и следствия поперечное поле на апертуре является причиной, порождающей возникновение поля внутри объема и продольной компоненты поля на апертуре резонатора. Важно отметить, что для достижения стационарности функционала (2.62) не требуется накладывать никаких ограничений на пробную функцию $\mathbf{H}'$ на идеально проводящих границах. Здесь имеет место естественное краевое условие. Аналогичное условие Неймана для скалярной функции. Аналогично требование $[\mathbf{n}\mathbf{h}] = 0$ соответствует условию Дирихле для скалярных функций.

В функционале (2.62) выражение $-(\text{rot } \mathbf{H}')^2 / \omega^2 \epsilon$ равно $\epsilon (\mathbf{E}')^2$, где $\mathbf{E}'$ — электрическое поле, выраженное через пробную функцию $\mathbf{H}'$ при помощи уравнения Максвелла (2.55). Поэтому следует ожидать, что имеется соответствующий стационарный функционал

$$F(\mathbf{E}') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\epsilon (\mathbf{E}')^2 - \frac{1}{\omega^2 \mu} (\text{rot } \mathbf{E}')^2 \right] d\Omega, \quad (2.72)$$

построенный аналогично (2.62), но выраженный через пробное электрическое поле. Если $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{e}$, где $\mathbf{E}$ — решение уравнения (2.61), то ясно, что первая вариация сводится к поверхностному интегралу

$$\delta F = \oint_S \frac{i}{\omega} \mathbf{n} [\mathbf{H}\mathbf{e}] dS. \quad (2.73)$$

Используя циклическую перестановку векторов, получим из (2.73) выражения

$$\delta F = \frac{i}{\omega} \oint_S \mathbf{e} [\mathbf{n}\mathbf{H}] dS, \quad (2.74)$$

$$\delta F = \frac{i}{\omega} \oint_S \mathbf{H} [\mathbf{e}\mathbf{n}] dS. \quad (2.75)$$

Как говорилось выше, δF в случае (2.69) обращалось в нуль при равной нулю тангенциальной компоненте электрического поля, как это реализуется на границе идеального проводника. Однако величина $[\mathbf{n}\mathbf{H}]$ не обращается в нуль на границах идеального проводника, поэтому пробное поле $\mathbf{E}'$ следует выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло граничным условиям. Следовательно, использование уравнений для полей $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$ приводит к существенному различию в практических расчетах.

2.5. Формулировка задач для потенциалов в структурах с трансляционной симметрией

Многие трехмерные задачи электромагнетизма могут быть аппроксимированы двумерными, соответствующими бесконечно длинной третьей оси (скажем, оси z). Трансляция в этом направлении не сопровождается никакими изменениями свойств материалов, функций источников или геометрии поперечного сечения. Следовательно, сами решения не зависят от z или являются периодическими функциями z .

При использовании двумерных моделей получается значительная экономия средств, затрачиваемых на численные расчеты. В этом разделе будут рассмотрены задачи определения электрического поля в линии передачи произвольного поперечного сечения и магнитного поля в зазоре между стальными магнитопроводами ротора и статора электромотора. В обоих случаях краевыми эффектами пренебрегаем. Тем не менее из таких двумерных моделей можно получить полезные для практики результаты.

2.5.1. Коаксиальная линия передачи

На рис. 2.4, а показан один из простейших случаев двумерной задачи для потенциала, когда внутренний проводник

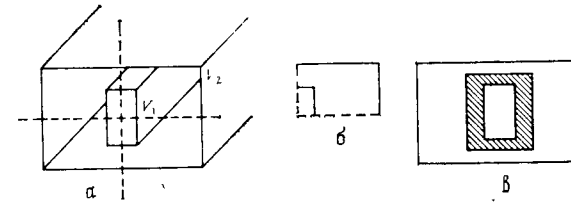


Рис. 2.4. а) Линия передачи, иллюстрирующая двумерную задачу для потенциала. б) Рассматриваемая область задачи, уменьшенная благодаря использованию симметрии и введению однородных граничных условий Неймана. в) Линия передачи, в которой внутренний проводник покрыт диэлектриком.

с потенциалом V_1 окружен вторым проводником с потенциалом V_2 . Этот пример уже рассматривался в гл. 1 без подробного объяснения формулировки задачи на основании принципов электромагнетизма.

Будем использовать функционал, выраженный непосредственно через потенциал V' :

$$F(V') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon (\nabla V')^2 d\Omega. \quad (2.76)$$

Из уравнения (2.3) следует, что в случае постоянного поля в диэлектрической среде, свободной от зарядов, потенциал должен удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla V) = 0. \quad (2.77)$$

Анализ, приведенный в разд. 2.3, показывает, что функционал (2.76) имеет экстремум для V , являющегося решением уравнения (2.77) и удовлетворяющего граничным условиям. Пробная функция V' ограничена при этом условиями $V' = V_1$ и $V' = V_2$ на граничных поверхностях.

Как уже отмечалось, функционал F можно применять в схемах метода конечных элементов, используя его стационарные свойства. Строго говоря, интегрирование в выражении (2.76) должно выполняться по конечному объему Ω . Можно, например, выбрать объем, заключенный между двумя поперечными плоскостями, расположенными на единичном расстоянии друг от друга. Тогда в случаях трансляционной симметрии функционал (2.76) становится двумерным

$$F(V') = \frac{1}{2} \int \epsilon(x, y) [\nabla V'(x, y)]^2 dx dy. \quad (2.78)$$

Структура, представленная на рис. 2.4, а, имеет две плоскости симметрии. Нетрудно сообразить, что в данном случае поставленная задача может быть заменена задачей, показанной на рис. 2.4, б. Последняя задача обладает тем преимуществом, что в плоскостях симметрии, показанных штриховыми линиями, применимо однородное краевое условие Неймана. Преимущество достигается за счет деления области определения решения на четыре части (тем самым достигается большая детализация в решении при данных вычислительных возможностях). Кроме того, потенциал на части периметра подчиняется естественному граничному условию, которому легче удовлетворить.

На рис. 2.4, в показан дополнительный диэлектрический вкладыш вокруг внутреннего проводника линии передачи. В этом случае функционал (2.76) вычисляется с учетом соответствующего значения диэлектрической проницаемости ϵ в области, занимаемой вкладышем. Пробные функции при этом должны быть непрерывными на поверхностях диэлектрика. В противном случае возник бы разрыв тангенциальной компоненты электрического поля $E = -\nabla V$ и, следовательно, были бы нарушены граничные условия, приведенные в разд. 2.1.3. Заметим, что непрерывность нормальной производной потенциала на поверхностях разделов, вообще говоря, невозможна. Действительно, граничные условия требуют, чтобы была не-

прерывной нормальная составляющая $D = -\epsilon \nabla V$, поэтому нормальная производная потенциала обязательно будет разрывной на границе диэлектрика.

2.5.2. Параллельная полосковая линия

На рис. 2.5 показан вариант задачи для линии передачи, представляющей параллельно-полосковую систему, бесконечную в двух направлениях. Выбранная граничная поверхность замыкается плоскостями X_1 и X_2 , показанными штриховыми линиями. Если эти плоскости расположены в областях, где проводящие электроды являются плоскими и параллельными, то вновь следует использовать краевое условие Неймана.

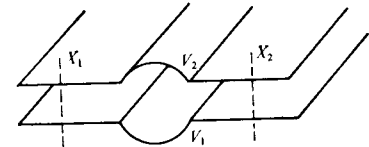
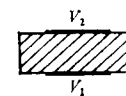


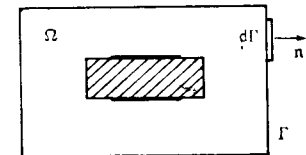
Рис. 2.5. Один из вариантов линии передачи, иллюстрирующий дальнейшее применение однородных граничных условий Неймана.

2.5.3. Пара открытых линий

Конфигурация, показанная на рис. 2.6, а, представляет собой пару полосковых линий, разделенных диэлектрической



а



б

Рис. 2.6 а) Параллельные полосы, разделенные диэлектрической пластиной. б) Введение произвольной ограничивающей поверхности.

пластиной. Ясно, что никакой вычислительный процесс не дает возможности прямого решения этой задачи в бесконечном пространстве. Один из способов, часто используемый для преодоления подобных трудностей, состоит в окружении полосковой линии некоторой фиктивной «коробкой» с потенциалом V_3 . Данный способ основан на том, что, если коробка удалена достаточно далеко от линии, она не может влиять на распределение поля вблизи линии. При этом функционал F (2.76) вычисляется по пространству, ограниченному коробкой. Ошибку, вызванную сведением поставленной задачи к задаче с конечным пространством, трудно оценить каким-либо способом, за исключением повторного решения задачи для

случая удаления границ коробки от линии на большее расстояние. В ряде ситуаций целесообразно положить $V_3 = (V_1 + V_2)/2$.

Однако возможен более тонкий подход, в котором коробка рассматривается как некая граница, за пределами которой детали распределения поля не представляют интереса. Обозначая внешнюю по отношению к коробке область буквой E (см. рис. 2.6, б), представим выражение (2.76) в виде

$$F(V') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon (\nabla V')^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_E \epsilon (\nabla V')^2 d\Omega. \quad (2.79)$$

Сосредоточим внимание на втором слагаемом правой части выражения (2.79), предусматривающем детальное знание поля. Преобразуем это слагаемое, пользуясь теоремой Грина, утверждающей, что

$$\oint_S (\varphi \nabla \psi) dS = \int_R [\varphi \Delta \psi + (\nabla \varphi)(\nabla \psi)] d\Omega. \quad (2.80)$$

Здесь S — любая поверхность, охватывающая объем R . Полагая $\varphi = V'$, $\nabla \psi = \epsilon \nabla V'$, идентифицируя R с двумерной областью E и S — с контуром Γ , получаем

$$\int_E [V' \operatorname{div}(\epsilon \nabla V') + \epsilon (\nabla V')^2] d\Omega = - \oint_{\Gamma} \epsilon V' \mathbf{n} \nabla V' d\Gamma. \quad (2.81)$$

Знак минус в соотношении (2.81) появляется потому, что обычно нормаль $\mathbf{n}$ к S указывает направление из объема R . Здесь же сохранено направление вектора $\mathbf{n}$ из объема Ω , так что теперь он становится направленным в объем R , совпадающий с внешним объемом E . Можно предположить, что ϵ постоянно в E и пробная функция V' такова, что $\Delta V' = 0$ во внешней области (более детальное знание V' не требуется). В этом случае формула (2.79) принимает вид

$$F(V') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon (\nabla V')^2 d\Omega - \oint_{\Gamma} \epsilon V' \mathbf{n} \nabla V' d\Gamma. \quad (2.82)$$

Предположение о том, что ϵ не изменяется резко на контуре Γ , дает основание допустить, что нормальная производная потенциала непрерывна на Γ . Таким образом, функционал $F(V')$ может быть вычислен с помощью формулы (2.82) последовательностью операций, которые не распространяются за пределы области Ω . Как мы уже говорили, функционал (2.79), (2.82) достигает экстремума при $V' = V$, где V — решение уравнения (2.77). Поэтому функционал (2.82) можно использовать в схемах конечных элементов.

2.5.4. Задача для скалярного магнитного потенциала

Рассмотрим еще один пример, упомянутый в гл. 1. Это задача нахождения поля в пазе ротора электромотора (рис. 2.7), более полно изображенного на рис. 2.8. Обычно в пазе помещается проводник, по которому протекает электрический ток, однако в данном случае мы предполагаем, что в проводнике отсутствует ток и магнитные свойства паза, такие же, как и воздуха, т. е. $\mu = \mu_0$.

В магнитостатическом приближении интегральное уравнение Максвелла — Ампера (2.10) соответствует уравнению

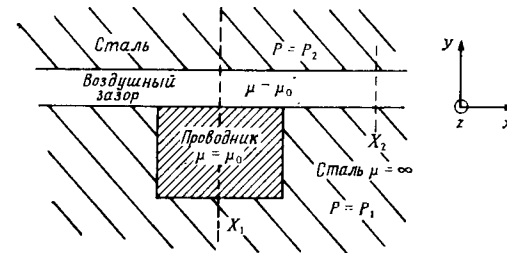


Рис. 2.7. Зазор между ротором и статором электромотора.

$m = nI$, где m — магнитодвижущая сила (м. д. с), создающая в магнитной цепи магнитный поток, пронизывающий n -витковую катушку с током I . Кроме того, аналогично *электродвижущей силе* e , создаваемой неоднородным распределением скалярного электрического потенциала в электрических цепях, m связано с неоднородностью скалярного магнитного потенциала P .

При проектировании магнитных цепей основной целью зачастую оказывается задача минимизации магнитного сопротивления цепи. Этот параметр аналогичен электрическому сопротивлению и связывает приложенную м. д. с (измеряемую в ампер-витках) с магнитным потоком, который она создает. В первом приближении можно считать, что сталь в магнитной цепи обладает бесконечной магнитной проницаемостью. Следовательно, магнитное сопротивление, связанное с пазом, может быть рассчитано, исходя лишь из его геометрии, поскольку м. д. с, обусловленная ампер-витками катушки, приложена только к воздушному зазору.

Возвращаясь к нашей задаче, видим, что она в значительной степени напоминает только что рассмотренные случаи электростатики. Подстановка $\mu = \mu_0$ в областях воздушного зазора и проводника в уравнение (2.28) приводит к уравнению $\Delta P = 0$. Таким образом, функционал, представляющий

магнитную энергию

$$F(Q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu_0 (\nabla Q)^2 d\Omega, \quad (2.83)$$

достигает экстремума при $Q = P$. Граничными условиями на магнитопроводящих поверхностях являются условия Дирихле

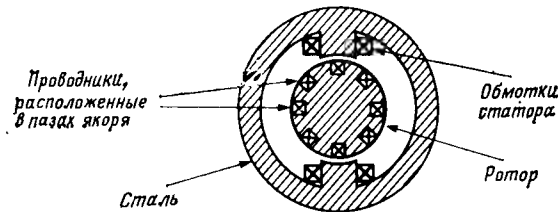


Рис. 2.8. Магнитная цепь простого электромотора.

$P = P_1$ и $P = P_2$, а на плоскости симметрии X_1 и удаленной от нее плоскости X_2 , где поле можно считать однородным, в качестве граничных условий следует использовать условия Неймана.

2.5.5. Задача для векторного магнитного потенциала

В случае когда через проводник в пазах протекает электрический ток, использование скалярного магнитного потенциала оказывается невозможным и задачу следует решать с помощью векторного потенциала $\mathbf{A}$.

Рассмотрим такую задачу для векторного потенциала, когда ток, протекающий по проводнику в пазах, направлен вдоль оси z , нормальной к плоскости рисунка 2.7:

$$\mathbf{J} = (0, 0, J(x, y)). \quad (2.84)$$

Так как рассматриваемая система обладает трансляционной симметрией, то вектор $\mathbf{A}$ должен иметь ту же форму, что и $\mathbf{J}$; в данном случае

$$\mathbf{A} = (0, 0, A(x, y)). \quad (2.85)$$

Если проницаемость μ кусочно-непрерывна, в области однородности можно использовать уравнение (2.49), которое при подстановке $\omega = 0$ превращается в действительное скалярное уравнение

$$\Delta A = -\mu J. \quad (2.86)$$

Хотя это уравнение и можно непосредственно применять к рассматриваемой задаче, поучительно, однако, вывести более общее уравнение, используя уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (2.87)$$

Подстановка в это уравнение выражения для магнитного поля

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.88)$$

приводит к уравнению

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}, \quad (2.89)$$

пригодному и для неоднородных сред. Интересуясь трансляционно-симметричным двумерным случаем, когда векторный потенциал имеет вид (2.85), фигурирующие в уравнении (2.89) векторные величины представим в форме

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}, 0 \right), \quad (2.90)$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \left[0, 0, -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right]. \quad (2.91)$$

Таким образом, уравнение (2.89) сводится к уравнению для скалярных величин

$$\text{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla A \right) = J, \quad (2.92)$$

которое с точностью до обозначений совпадает с неоднородным уравнением Гельмгольца (2.34). Следовательно, для линейной среды в соответствии с (2.38), (2.92) получаем следующий функционал:

$$F(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2\mu} (\nabla u)^2 - Ju \right] d\Omega, \quad (2.93)$$

достигающий экстремума при $u = A$ (A является решением уравнения (2.92), удовлетворяющим граничным условиям).

2.5.6. Поле, создаваемое токонесущим проводником, находящимся в пазах ротора

Возвращаясь к простой схеме (рис. 2.7), можно на ее основе поставить задачу, дополнительную к рассмотренной в разд. 2.5.4. А именно, найти распределение поля, создаваемое током, протекающим в проводнике паза ротора, в случае отсутствия внешних полей. Вариационная задача определяется соотношением (2.93), и остается лишь сформулировать условия на границах применительно к заданной геометрии.

Поверхность X_1 является плоскостью симметрии, к которой вектор магнитного поля должен быть нормальным. Если предполагается, что сталь магнитопровода имеет бесконечную проницаемость $\mu = \infty$, то силовые линии поля должны выходить из него также нормально. В противном случае внутри магнитопровода было бы конечное тангенциальное поле $\mathbf{H}$,

чтобы удовлетворить граничному условию непрерывности этой компоненты. Это привело бы к обращению в бесконечность магнитной индукции $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ внутри магнитопровода. Поскольку $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial A}{\partial x}, -\frac{\partial A}{\partial y}, 0 \right), \quad (2.94)$$

нетрудно видеть, что если вектор магнитной индукции перпендикулярен какой-либо плоскости (так что $[\mathbf{B}\mathbf{n}] = 0$), то $n \nabla A = 0$.

В случае рассматриваемой здесь двумерной задачи можно наглядно показать, что A является постоянной величиной вдоль любой силовой линии магнитного поля. Так, изменение A при движении из точки (x, y) в точку $(x + dx, y + dy)$ равно

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy \right). \quad (2.95)$$

Если смещение (dx, dy) происходит вдоль линии потока, то dx и dy должны быть пропорциональны соответствующим компонентам $\mathbf{B}$ в точке (x, y) (т. е. $\partial A / \partial y$ и $-\partial A / \partial x$). Понятно, что dA в уравнении (2.95) обращается в нуль, так что A остается постоянным.

Таким образом, если может быть найдена плоскость, подобная X_2 (рис. 2.7), в которой магнитная индукция практически однородна, то ей может быть присвоено произвольное постоянное значение потенциала, в частности $A = 0$, и все граничные условия наконец определены.

Решив обе задачи, поставленные в разд. 2.5.4 и 2.5.6, можно вследствие линейности задачи сложить соответствующие выражения для магнитных полей и получить полезную аппроксимацию для поля в зазоре между ротором и статором электромотора.

2.6. Формулировка осесимметричных задач для потенциалов

Другой класс задач, допускающих двумерное представление и соответствующую экономию вычислительных ресурсов, — задачи для структур с осевой симметрией.

В качестве примера вновь рассмотрим статическое распределение поля вблизи неоднородности коаксиального кабеля (рис. 2.9), связанной с наличием ступеньки на внутреннем проводнике и диэлектрической шайбы. Функционал по-прежнему определяется выражением (2.76). Вследствие азимутальной симметрии задача оказывается двумерной, так как ни один анализируемый параметр не зависит от ϕ в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) . Следовательно, интегрирование по ϕ может быть выполнено непосредственно при

определении функционала; элемент объема $d\Omega$ принимает вид

$$d\Omega = 2\pi r dr dz \quad (2.96)$$

и для функционала имеем выражение

$$F(V) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon(r, z) [\nabla V(r, z)]^2 2\pi r dr dz. \quad (2.97)$$

Вновь, как и прежде, в схемах конечных элементов используется свойство стационарности $F(u)$ при V , являющемся решением однородного уравнения Пуассона (2.77), а пробные

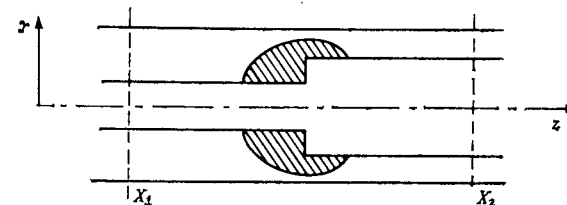


Рис. 2.9. Неоднородность в коаксиальном кабеле.

функции V должны удовлетворять граничным условиям Дирихле. Здесь это следующие условия: $V = V_1$ и $V = V_2$ соответственно на внутреннем и внешнем проводниках коаксиального кабеля. В данной задаче предполагается, что длина кабеля по обе стороны от скачка достаточно велика. Потенциал искажается лишь вблизи скачка, поэтому при решении задачи можно ограничиться объемом между достаточно удаленными от скачка поперечными плоскостями X_1, X_2 , показанными штриховыми линиями на рис. 2.9. В качестве дополнительных граничных условий можно использовать на этих плоскостях граничное условие Неймана. Как и ранее, непрерывность тангенциального электрического поля на границах раздела диэлектриков требует непрерывности V на поверхности диэлектрической шайбы. При этом использование функционала (2.97) с соответствующими резкими изменениями $\epsilon(r, z)$ автоматически гарантирует, что нормальные компоненты поля, полученного с использованием экстремального свойства функционала F , удовлетворяют граничным условиям, приведенным в разд. 2.1.

2.6.1. Осесимметричная система с нелинейным магнитным материалом

Теперь рассмотрим осесимметричную задачу, в которой магнитное поле создается токами в соленоидах, примыкающих к аксиально-симметричной цепи магнитопровода. Типичным

примером практической задачи этого типа является расчет линзы электронного микроскопа (рис. 2.10). Достижение оптимальных характеристик при проектировании такой системы требует очень точного расчета магнитных полей для любой заданной геометрии.

Как было указано в случае системы с трансляционной симметрией, требование включения областей, где протекает ток, диктует необходимость решения задачи для векторного потенциала $\mathbf{A}$. Вместо того чтобы попытаться использовать

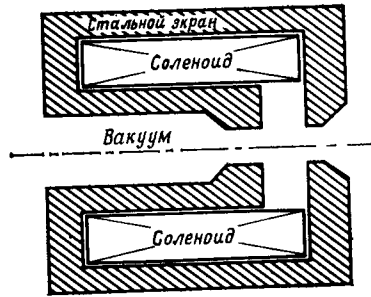


Рис. 2.10. Схематическое изображение магнитной линзы электронного микроскопа.

правила, которые были установлены для скалярного уравнения Гельмгольца, проще приступить к решению задачи заново. В данном случае было бы неверно считать, что при типичных условиях работы линзы μ не зависит от $\mathbf{B}$, т. е. что магнитные материалы являются линейными. Рассмотрение нелинейных магнитных задач в деталях приводится в гл. 5. Здесь же рассматривается вариационная основа

для постановки более простой линейной задачи, а нелинейные эффекты учитываются с помощью незначительного дополнительного усложнения. Задача формулируется относительно векторного потенциала $\mathbf{A}$, так что магнитная индукция определяется уравнением (2.18). Предполагается, что магнитный материал характеризуется некоторой экспериментально полученной зависимостью

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B}). \quad (2.98)$$

Будем рассматривать изотропные материалы, когда направление $\mathbf{H}$ всегда совпадает с направлением $\mathbf{B}$. Кроме того, обозначая величины этих двух векторов соответственно H и B , можно ожидать, что H должно бы монотонно увеличиваться с ростом B . Уравнение (2.98) может быть записано в другом виде

$$\mathbf{H} = \nu(B) \mathbf{B}, \quad (2.99)$$

где $\nu = 1/\mu$ — удельное магнитное сопротивление. Определим величину

$$\mathcal{E}_M = \int_0^B \mathbf{H}(b) db, \quad (2.100)$$

где введена фиктивная переменная b . В выражении (2.100) интеграл берется в пределах от $b = 0$ до $b = B$. В простом изотропном случае характеристику магнитного материала и выражение (2.100) для $\mathcal{E}_M$ можно представить графически, как показано на рис. 2.11.

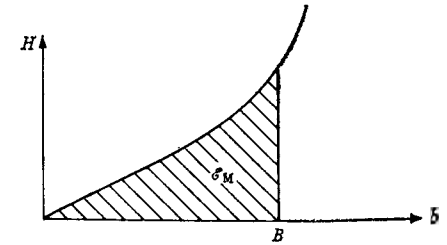


Рис. 2.11. Характеристика намагничиваемости магнитного материала.

В величине $\mathcal{E}_M$ несложно угадать плотность энергии магнитного поля, хотя эта идентификация не играет в дальнейшем никакой роли. Формулировка задачи завершается предположением, что протекающий ток является постоянным. Магнитное поле в этом случае определяется уравнением (2.87) $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, и будет существовать единственное решение $\mathbf{A}$ для данного тока $\mathbf{J}$ при учете краевых условий, наложенных на $\mathbf{A}$ на некоторой граничной поверхности S , охватывающей объем Ω . С учетом того что

$$\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}', \quad (2.101)$$

попытаемся доказать, что функционал

$$F(\mathbf{A}') = \int_{\Omega} [\mathcal{E}_M(\mathbf{B}') - \mathbf{J} \mathbf{A}'] d\Omega \quad (2.102)$$

достигает экстремума при $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$. Допустим, что

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}. \quad (2.103)$$

Если

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \delta \mathbf{B}, \quad (2.104)$$

где $\mathbf{B}$ есть истинное решение, соответствующее $\mathbf{A}$, то из уравнения (2.101) получаем

$$\delta \mathbf{B} = \text{rot } \delta \mathbf{A}. \quad (2.105)$$

Теперь

$$\mathcal{E}_M(\mathbf{B}') = \int_0^{B+\delta B} \mathbf{H}(b) db, \quad (2.106)$$

$$\mathcal{E}_M(\mathbf{B}') = \mathcal{E}_M(\mathbf{B}) + \int_B^{B+\delta B} \mathbf{H} db. \quad (2.107)$$

Предположим, что $\delta \mathbf{B}$ есть лишь малое возмущение $\mathbf{B}$. Конечно, условие стационарности $F(\mathbf{A}')$ при $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ требует обращения в нуль только возмущения первого порядка δF . В линейном по $\delta \mathbf{B}$ приближении из выражения (2.107)

получаем

$$\mathcal{E}_M(\mathbf{B}') = \mathcal{E}_M(\mathbf{B}) + \mathbf{H}(\mathbf{B}) \delta \mathbf{B}. \quad (2.108)$$

Таким образом, из выражения (2.102) для δF имеем

$$\delta F = \int_{\Omega} [\mathbf{H} \delta \mathbf{B} - \mathbf{J} \delta \mathbf{A}] d\Omega. \quad (2.109)$$

Если в этом выражении заменить $\mathbf{J}$ на $\text{rot } \mathbf{H}$, то

$$\delta F = \int_{\Omega} [\mathbf{H} \delta \mathbf{B} - \delta \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H}] d\Omega. \quad (2.110)$$

Теперь используем векторное тождество

$$\text{div} [\delta \mathbf{A} \mathbf{H}] = \mathbf{H} \text{rot } \delta \mathbf{A} - \delta \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H}, \quad (2.111)$$

из которого после применения уравнения (2.105) следует

$$\text{div} [\delta \mathbf{A} \mathbf{H}] = \mathbf{H} \delta \mathbf{B} - \delta \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H}. \quad (2.112)$$

Следовательно, выражение (2.110) можно записать в виде

$$\delta F = \int_{\Omega} \text{div} [\delta \mathbf{A} \mathbf{H}] d\Omega. \quad (2.113)$$

Используя теорему Остроградского — Гаусса, преобразуем это выражение к следующей форме:

$$\delta F = \oint_S [\delta \mathbf{A} \mathbf{H}] \mathbf{n} dS, \quad (2.114)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный к поверхности S , охватывающей объем Ω . Используя циклические свойства смешанного произведения, можно следующим образом записать выражение (2.114):

$$\delta F = \oint_S [\mathbf{H} \mathbf{n}] \delta \mathbf{A} dS. \quad (2.115)$$

Первая вариация F обращается в нуль, если на граничной поверхности S выполняется одно из двух условий: или $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}$ ограничено функциями, которые удовлетворяют краевым условиям на S , т. е. $\delta \mathbf{A}$ обращается в нуль на S , или S должна быть поверхностью, нормаль к которой совпадает с направлением $\mathbf{H}$, так что обращается в нуль $[\mathbf{H} \mathbf{n}]$. Конечно, S может состоять из поверхностей, на каждой из которых остается справедливым одно из приведенных выше краевых условий. С помощью несложных алгебраических преобразований можно показать, что для изотропной среды условие $[\mathbf{H} \mathbf{n}] = 0$ соответствует вектору $\mathbf{A}$, тангенциальному S , причем нормальная производная $\mathbf{A}$ на S обращается в нуль. Так,

допустим, что в данной точке $\mathbf{n}$ есть вектор $(0, 0, 1)$. Находим, что

$$[\mathbf{H} \mathbf{n}] = \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, 0 \right). \quad (2.116)$$

Это выражение обращается в нуль, когда описанные выше краевые условия локально удовлетворяются.

Возвращаясь к задаче для осесимметричной линзы, видим, что в цилиндрической системе координат (r, φ, z) и ток, и векторный потенциал имеют только φ -компоненты

$$\mathbf{J} = (0, J_{\varphi}, 0), \quad (2.117)$$

$$\mathbf{A} = (0, A_{\varphi}, 0). \quad (2.118)$$

С другой стороны, вектор $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ направлен везде параллельно плоскости (r, z)

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z}, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) \right). \quad (2.119)$$

Эта задача по существу двумерная с одной неизвестной функцией $A(r, z)$ и внешним источником $J(r, z)$. Индекс φ , означающий, что A и J являются фактически компонентами векторов, в дальнейшем опускается. Очевидно, что формулировка задачи для линейного случая состоит в том, чтобы построить функционалы

$$F_E = \int \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A) \right]^2 - J A \right\} 2\pi r dr dz \quad (2.120)$$

для подходящих пробных функций A в каждом конечном элементе Ω_E . Затем можно использовать сумму вкладов всех элементов

$$F = \sum_E F_E \quad (2.121)$$

благодаря свойству стационарности функционала. Что касается граничных условий и непрерывности на границах элементов, то ситуация здесь такая же, как в задаче с трансляционной симметрией. Нормальная компонента $\mathbf{B}$ должна быть непрерывной на каждой границе раздела между элементами. Так как эта составляющая соответствует тангенциальной производной от A , достаточно непрерывности A на таких общих границах раздела. Не требуется, чтобы нормальная производная A была непрерывной. Действительно, непрерывность $\mathbf{H} = \mathbf{v} \mathbf{B}$ требует разрыва $\mathbf{n} \nabla A$ в случаях, когда $\mathbf{v}$ меняется скачком на границе. Поскольку требования на границах являются в сущности следствиями уравнений Максвелла, то ограничения на нормальную производную A автоматически удовлетворяются, когда A соответствует этим уравнениям.

2.7. Распространение волн в однородных волноводах

Задача расчета электромагнитных полей и параметров часто возникает при инженерном проектировании и физическом анализе. Большинство задач электромагнетизма может быть сведено к решению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, подчиненных граничным условиям. Этот факт указывает на возможность продуктивного использования метода конечных элементов для расчета волновых процессов. В данном разделе излагается вариационная формулировка

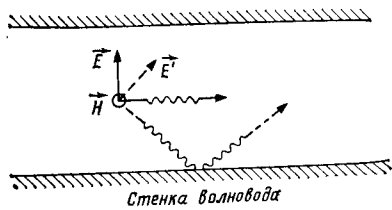


Рис. 2.12. Схематическое изображение образования волны ТМ-типа в волноводе. Волнистыми линиями показаны два возможных направления распространения.

одной из простейших задач распространения волн — задачи для однородного волновода — с целью подготовки ее для решения методом конечных элементов в гл. 3.

Этот раздел касается главным образом основных свойств волноводов, и мы отсылаем читателя за подробностями к соответствующим учебникам, например [1, 4].

В сущности поведение волноводов обусловлено очевидным свойством полой трубы с отражающей внутренней поверхностью — передавать энергию электромагнитной волны от одного конца к другому. Возможно, многие наблюдали это явление, смотря через длинную трубу с зеркальной внутренней поверхностью.

В зависимости от характера ориентации векторов электрического и магнитного полей по отношению к стенкам волновода электромагнитные волны в волноводе разделяются на два независимых типа (моды). Для одной из мод, поперечно-магнитной (ТМ) волны, вектор магнитного поля перпендикулярен оси волновода, а вектор электрического поля имеет как поперечную, так и продольную компоненты. В случае поперечно-электрической, или ТЕ-волны, вектор электрического поля перпендикулярен оси волновода, а вектор магнитного поля имеет поперечную и продольную компоненты. На рис. 2.12 схематически показано, как может возникнуть ТМ-волна, если изменить направление распространения плоской волны в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{H}$. Аналогично можно представить себе и образование ТЕ-волны, когда распространение плоской волны отличается от осевого и определяющий направление распространения вектор лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{E}$.

Заметим, что приведенная схематическая картина образования двух типов волн значительно усложняется явлениями интерференции волн, отраженных от стенок волновода. Это явление приводит к возникновению волн разных порядков (поперечному квантованию). Оказывается, что распространяться по волноводу без затухания могут лишь достаточно короткие волны, длина которых сравнима с диаметром волновода.

2.7.1. Основные дифференциальные уравнения для волноводных типов волн

Рассмотрим цилиндрический волновод произвольного поперечного сечения, ось которого совпадает с осью z . Изучим возможность распространения монохроматической волны с частотой ω по такому волноводу, представляя электрическое и магнитное поля в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y) \exp(i\omega t - i\beta z), \quad (2.122)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y) \exp(i\omega t - i\beta z). \quad (2.123)$$

Здесь β — постоянная распространения, соответствующая длине волны $2\pi/\beta$ в волноводе. В более общем случае, когда имеет место затухание волны, постоянная распространения является комплексной величиной. Выражения (2.122) и (2.123) следует подставить в уравнения Максвелла, записанные для случая отсутствия сторонних токов

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2.124)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}. \quad (2.125)$$

В результате получаем

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\beta E_y = -i\omega\mu H_x, \quad (2.126)$$

$$-i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y, \quad (2.127)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z, \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + i\beta H_y = i\omega\epsilon E_x, \quad (2.129)$$

$$-i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\epsilon E_y, \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon E_z. \quad (2.131)$$

Уравнения (2.126) и (2.130) могут быть разрешены относительно H_x и E_y , уравнения (2.127) и (2.129) — относительно

H_y и E_y . При этом имеем

$$H_x = i \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) / (k^2 - \beta^2), \quad (2.132)$$

$$H_y = -i \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) / (k^2 - \beta^2), \quad (2.133)$$

$$E_x = -i \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) / (k^2 - \beta^2), \quad (2.134)$$

$$E_y = i \left(-\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) / (k^2 - \beta^2), \quad (2.135)$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon. \quad (2.136)$$

Таким образом, с помощью формул (2.132)–(2.135) можно выразить все компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через E_z и H_z .

Основные волновые уравнения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получаются из уравнений (2.124) и (2.125) путем исключения соответственно электрического или магнитного полей; предполагая, что μ и ϵ постоянные, находим

$$\Delta \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}, \quad (2.137)$$

$$\Delta \mathbf{H} = -k^2 \mathbf{H}. \quad (2.138)$$

Принимая во внимание экспоненциальную зависимость полей от координаты z , из (2.137), (2.138) получаем для z -компонент полей уравнения

$$\Delta_{\perp} E_z + (k^2 - \beta^2) E_z = 0, \quad (2.139)$$

$$\Delta_{\perp} H_z + (k^2 - \beta^2) H_z = 0, \quad (2.140)$$

в которых введен поперечный лапласиан

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.141)$$

Как видно из выражений (2.132)–(2.135), возможно существование двух типов волн: поперечно-электрических (TE), для которых $E_z = 0$, $H_z \neq 0$, и поперечно-магнитных (TM), когда $H_z = 0$, $E_z \neq 0$. Для анализа этих типов волн основополагающими являются уравнения (2.139), (2.140) (так как все другие величины выражаются через E_z и H_z). Заметим, что эти уравнения представляют собой упрощенную форму уравнения Гельмгольца (2.34), так что при их решении могут быть использованы вариационные методы.

Прежде чем приступить к детальному рассмотрению этого подхода, необходимо установить граничные условия для каждой из этих мод. Для большинства случаев хорошей аппроксимацией оказывается предположение о том, что стенки волноводов являются идеальными проводниками. Там, где этого недостаточно, может быть получено более точное решение, учитывающее потери в стенках волновода путем некоторой

модификации выражений для случая без потерь. Для волновода с идеально проводящими стенками граничные условия, как было установлено в разд. 2.1, требуют, чтобы E_z обращалось в нуль на его стенках. Следовательно, в качестве граничного условия, связанного с уравнением (2.139), следует использовать краевое условие Дирихле $E_z = 0$. Поскольку все компоненты поля TM -волны определяются выражениями (2.132)–(2.135), полученными из уравнений Максвелла, то достаточно, чтобы E_z подчинялось своему граничному условию, а ограничения, которые должны быть наложены на другие компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, будут удовлетворены автоматически. Однако из уравнения (2.140) граничные условия, приведенные в разд. 2.1, не дают непосредственных ограничений на H_z .

Допустим, что часть границы лежит в плоскости (x, z) . Уравнения (2.133) и (2.134) дают для TE -волны

$$H_y = \frac{-i\beta}{k^2 - \beta^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (2.142)$$

$$E_x = \frac{-i\omega\mu}{k^2 - \beta^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (2.143)$$

Точные граничные условия требуют, чтобы нормальная компонента $\mathbf{H}$ и тангенциальная компонента $\mathbf{E}$ обращались в нуль; в данном случае на граничном элементе в плоскости (x, z) должны обращаться в нуль H_y и E_x . Оба требования удовлетворяются, если $\partial H_z / \partial y = 0$, т. е. когда обращается в нуль нормальная производная. Поскольку оси x и y были выбраны произвольно, можно с уверенностью полагать, что граничным условием для TE -волн является требование $n \nabla H_z = 0$ независимо от ориентации граничного элемента. Очевидно, что уравнение (2.140), определяющее TE -волны, подчиняется естественному граничному условию (однородному условию Неймана). Несмотря на то что дифференциальные уравнения, описывающие TE - и TM -волны, одинаковы, различные краевые условия для них приводят к существенно отличным свойствам двух типов волн.

2.7.2. Вариационная задача

Теперь рассмотрим вариационную задачу для волн в однородных волноводах. Из сравнения уравнений (2.139) и (2.34) видно, что для TM -волн функционал (2.38) принимает вид

$$F(E_z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\nabla_{\perp} E_z)^2 - (k^2 - \beta^2) E_z^2] dx dy. \quad (2.144)$$

В этом случае следует использовать граничное условие Дирихле $E_z = 0$ на границе волновода (контуре, окружающем

двумерную область Ω). Аналогичный функционал для H_z с естественным граничным условием $n\nabla H_z = 0$ используется для ТЕ-волн. Вводя обозначение $k_c^2 = k^2 - \beta^2$, видим, что уравнения (2.139) и (2.140) соответствуют задачам на собственные значения, нетривиальные решения которых существуют лишь в случае, когда k_c принимает одно из дискретных значений, определение которых является частью задачи. Вычисление этого дискретного ряда чисел методом конечных элементов излагается в гл. 3. Здесь мы отметим, что для каждого из этих двух типов волн существует полная система собственных функций $E_{zi}(H_{zi})$, соответствующих дискретному ряду собственных значений (волновых чисел) k_{ci} . Каждому значению k_{ci} соответствует величина

$$\beta_i^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_{ci}^2. \quad (2.145)$$

Таким образом, видно, что каждая волна имеет определенную постоянную распространения и структуру поля. Заметим, что при любой заданной частоте можно выбрать достаточно большое собственное значение k_{ci} , когда величина β_i^2 становится отрицательной. В таком случае постоянная распространения оказывается чисто вещественной величиной и волны будут затухать при распространении вдоль волновода. Для каждой i -й волны существует наименьшая или критическая частота ω_{ci} , соответствующая $\beta_i = 0$:

$$\omega_{ci}^2 \mu \epsilon = k_{ci}^2. \quad (2.146)$$

При $\omega < \omega_{ci}$ волна не распространяется свободно по волноводу, а экспоненциально затухает с расстоянием.

2.8. Трехмерные скалярные задачи Лапласа и Гельмгольца

Неоднородное уравнение Гельмгольца (2.34) и соответствующий ему функционал (2.38) обсуждались пока только в контексте задач, которые обладают симметрией, позволяющей трактовать их как двумерные. Когда искомая функция является скалярной величиной, то нет никаких особых трудностей в рассмотрении трехмерных задач. Конечно, требуются дополнительные, иногда значительные объемы численных расчетов в случаях, когда задачу необходимо решить с высокой точностью. Однако этот аспект здесь нас интересовал не будет. Ниже рассматриваются две практические задачи, которые служат типичным примером подхода, использующего одну независимую скалярную функцию, заданную в трехмерном пространстве.

Сначала рассмотрим задачу вычисления омического сопротивления тела произвольной формы, например, изображен-

ного на рис. 2.13 и состоящего из двух различных материалов, имеющих проводимости σ_1 и σ_2 . На тело поданы потенциалы V_1 и V_2 , по цепи протекает ток I . Очевидно, что искомое сопротивление равно

$$R = (V_2 - V_1)/I. \quad (2.147)$$

Локальные свойства материала характеризуются законом Ома

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.148)$$

Рассмотрим установившееся состояние, когда

$$\mathbf{E} = -\nabla V, \quad (2.149)$$

так что

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla V. \quad (2.150)$$

В случае отсутствия изменения во времени уравнение непрерывности (2.8) требует, чтобы дивергенция плотности тока обращалась в нуль. Таким образом, из уравнения (2.150) получаем

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla V) = 0. \quad (2.151)$$

Это уравнение совместно с краевыми условиями определяет потенциал, нахождение которого дает возможность решить задачу. Граничными условиями на поверхности контактов являются равенства $V = V_1$ и $V =$

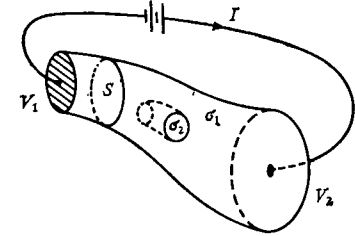


Рис. 2.13. Электрическая цепь, включающая проводящее тело неправильной формы.

$= V_2$. Заметим, что на свободной поверхности тела нормальная компонента тока должна обращаться в нуль, так как ток не может вытекать в окружающее изолирующее пространство. Поэтому, как следует из уравнения (2.150), на свободной поверхности должна обращаться в нуль нормальная компонента градиента потенциала $n\nabla V$. А это не что иное, как однородное естественное граничное условие Неймана. Уравнение (2.151) представляет собой упрощенный вариант весьма общего уравнения (2.34), рассмотренного в разд. 2.3.

Таким образом, функционал (2.38) принимает в данном случае вид

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma (\nabla u)^2 d\Omega. \quad (2.152)$$

Это выражение имеет экстремум при $u = V$, где V удовлетворяет уравнению (2.151) и условиям Дирихле, которые применяются к поверхностям контактов. Вновь отметим, что не требуется никаких ограничений на поверхностях, где

реализуется естественное граничное условие Неймана. Если σ кусочно-постоянна, как в примере, показанном на рис. 2.13, то уравнение (2.151) сводится к уравнению Лапласа $\Delta V = 0$. Однако, для того чтобы использовать стационарные свойства функционала, составленного из функционалов для областей с кусочно-постоянной проводимостью, и получить решения, которые удовлетворяют условиям на границах раздела между такими областями, должно быть сохранено, конечно, условие непрерывности нормальной компоненты вектора $\sigma \nabla V$. Вычислив распределение потенциала V , можно получить выражение для тока и тем самым в соответствии с (2.147) — значение сопротивления

$$I = - \int_S \sigma (\nabla V) dS. \quad (2.153)$$

Здесь интегрирование производится по любому поперечному сечению S , через которое протекает полный ток, как показано на рис. 2.13.

2.8.1. Задачи акустики

Теперь рассмотрим другой пример — трехмерную задачу об акустических колебаниях в резонаторах, заполненных воздухом. Не будучи непосредственно связанной с электричеством, эта задача тем не менее является любопытным примером, так как именно для нее впервые Гельмгольцем было использовано уравнение, чье имя оно теперь носит. В данном разделе это уравнение применяется для расчета резонансных частот акустических залов, резонаторов громкоговорителей и т. д. Теория акустики излагается здесь весьма кратко; для детального изучения читателю следует обратиться к учебникам, например книге Мейера и Неймана [5].

Звуковые волны в воздухе представляются продольными возмущениями давления p на фоне некоторого статического давления p_0 . Такие возмущения описываются волновым уравнением

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (2.154)$$

где c — скорость звука в воздухе

$$c = \gamma p_0 / \rho_0, \quad (2.155)$$

ρ_0 — статическая плотность воздуха, γ — отношение удельных теплоемкостей воздуха при постоянных давлении и объеме. Возмущение скорости воздуха v связано с малым изменением

давления p линеаризованным уравнением движения

$$\nabla p = - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (2.156)$$

Уравнения (2.154) и (2.156) могут быть представлены в комплексной форме при заданной частоте колебаний

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (2.157)$$

$$\nabla p = - i \omega \rho_0 v, \quad (2.158)$$

$$k^2 = \omega^2 / c^2. \quad (2.159)$$

В уравнении (2.157) нетрудно узнать уравнение Гельмгольца (2.34), так что результаты разд. 2.3 могут быть непосредственно применены здесь, если известны соответствующие граничные условия. Для резонаторов с жесткими стенками нормальная составляющая скорости v должна обращаться в нуль на стенках. Очевидно, что это ограничение является естественным условием $n \nabla p = 0$. Функционал, получаемый из (2.38) и соответствующий уравнению (2.157)

$$F(p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\nabla p)^2 - k^2 p^2] d\Omega, \quad (2.160)$$

достигает экстремума при p , совпадающих с решениями уравнения (2.157) для возмущений давления p . В гл. 3 будет показано, как выполнение условий стационарности $F(p)$ для связанной системы конечных элементов дает матричное уравнение, собственные значения которого представляют последовательность значений k_i , соответствующих нетривиальным решениям уравнения (2.157). Поскольку $k^2 = \omega^2 / c^2$, то определение k_i дает искомые резонансные частоты резонатора. Эта задача в ее трехмерном варианте рассматривается также в гл. 6.

2.9. Краткий обзор литературы

Подбор литературы к данной главе отличается некоторым своеобразием. Глава 2 является обзором теории электромагнитного поля с попыткой указать, какие задачи могут быть решены методами конечных элементов. Теория поля была создана довольно давно, поэтому нет необходимости цитировать оригинальные статьи, хотя в перечисленных ниже книгах на некоторые из них имеются ссылки. Авторы данной книги, каждый в отдельности, написали краткие работы по электромагнетизму, достоинством которых является стилистическая совместимость с настоящей книгой [6, 7]. На рассматриваемом уровне находятся также книги Поповича [8] и Рамо, Уиннери и ван Дюзера [1]. На том же уровне

написаны книги Блини [9], Сандера и Рида [10] и Хейта [11]. Можно рекомендовать также книгу Стрэттона [12], исчерпывающе излагающую теорию электромагнетизма.

Математические проблемы, относящиеся к методу конечных элементов, на элементарном уровне хорошо освещены в книге Райли [2]; исчерпывающее изложение имеется в двухтомном труде Морса и Фешбаха [3].

Глава 3

Треугольные элементы для скалярного уравнения Гельмгольца

3.1. Введение

Любой многоугольник, каким бы сложным он ни был, может быть разбит на треугольники. Поэтому здесь, как и в гл. 1, в качестве фундаментального элемента будет использован треугольник.

Однако точность решения можно заметно повысить, если на каждом треугольнике вместо кусочно-планарных функций использовать полиномы. При желании повышенную точность можно получить за счет стоимости вычислений, используя на каждом треугольнике аппроксимации высокого порядка и выбирая треугольники намного крупнее, чем в методе конечных элементов первого порядка. Действительно, и теория, и практические расчеты подтверждают, что для решения многих двумерных задач наилучшим подходом является деление области задачи на минимально возможное число больших треугольников и достижение требуемой точности решения применением полиномиальных аппроксимаций высоких порядков на этой очень крупной сетке.

Ниже будут подробно изложены вопросы построения треугольных элементов для неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца. Рассматриваются лишь скалярные и квазискалярные уравнения Гельмгольца, а материальные среды предполагаются локально линейными, однородными и изотропными. Интерес к построению элементов для неоднородного уравнения Гельмгольца объясняется общностью этого уравнения, которая позволяет сформулировать многие задачи, опуская отдельные члены в данном уравнении.

3.2. Симплексные координаты

Аппроксимирующие функции, использованные в треугольных конечных элементах первого порядка, обладают двумя фундаментальными свойствами, которые объясняют простоту и привлекательность метода. Во-первых, непрерывность искомой функции на границах между треугольниками гарантируется лишь равенством значений функции в совпадающих вершинах треугольников. Во-вторых, полученные аппроксимации никоим образом не зависят от расположения

треугольников по отношению к глобальной системе координат (x, y) . Последняя особенность, вероятно, геометрически очевидна: поверхность решения локально определяется значениями функции в вершинах треугольника и поэтому не изменяется при переопределении осей x и y , даже если изменяются алгебраические выражения для аппроксимирующих функций на каждом треугольнике. Оба эти ценные свойства сохраняются и для аппроксимаций высокого порядка при соответствующем определении локальных базисных функций внутри каждого треугольника.

Наиболее просто теория базисных полиномов излагается на языке так называемых симплексных координат. Симплекс S в N -мерном пространстве определяется как наиболее простая нетривиальная геометрическая фигура с $N+1$ вершиной. Следовательно, одномерный симплекс представляет собой отрезок прямой линии, двумерный симплекс — треугольник, а симплекс в трехмерном пространстве — тетраэдр. Знание координат его вершин достаточно для однозначного определения любого симплекса. Размер симплекса определяется формулой

$$\sigma(S) = \frac{1}{N!} \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(N)} \\ 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N+1}^{(1)} & x_{N+1}^{(2)} & \dots & x_{N+1}^{(N)} \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Элементами этого детерминанта являются координаты вершин симплекса. Нижние индексы определяют номера вершин, а верхние — номера ортогональных координат в N -мерном пространстве. При таком определении размером отрезка является его длина, треугольника — его площадь, тетраэдра — его объем и т. д.

Пусть некоторая точка P расположена внутри симплекса S . Тогда P однозначно определяет расчленение S на $N+1$ подсимплекс, каждый из которых имеет точку P в качестве одной из вершин; при этом оставшиеся вершины подсимплексов берутся из числа $N+1$ вершин симплекса S . Например, отрезок линии делится на два линейных (под)отрезка лежащей на нем точкой P ; аналогично треугольник разбивается на три (под)треугольника любой внутренней точкой P , как показано на рис. 3.1, а. Понятно, что каждый из $N+1$ подсимплексов полностью помещается внутри симплекса S . Размер S равен сумме размеров подсимплексов

$$\sigma(S) = \sum_{k=1}^{N+1} \sigma(S_k). \quad (3.2)$$

Это соотношение может быть получено геометрически или выведено алгебраически из формулы (3.1).

Расчленение S на подсимплексы всецело определяется выбором точки P . И наоборот, задание размеров $N+1$ подсимплекса (отнесенных к размеру S) может рассматриваться как определение местоположения точки P внутри симплекса S . Таким образом, можно определить $N+1$ чисел

$$\xi_m = \sigma(S_m)/\sigma(S), \quad (3.3)$$

совокупность которых однозначно определяет точку P внутри S . Эти числа обычно называются *симплексными* (или *однородными*) *координатами* точки P . Геометрический смысл величин ξ_m — отношение длины перпендикуляра, опущенного из

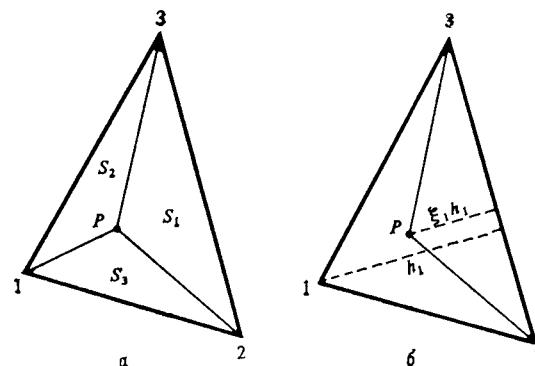


Рис. 3.1. а) Любая внутренняя точка P определяет разделение треугольника на подтреугольники. б) Симплексные координаты определяются отношением расстояний от точки P до какой-либо стороны треугольника и от той же стороны до противоположной вершины.

точки P на одну из граней симплекса, к длине опущенного на ту же грань перпендикуляра из вершины симплекса, противоположной данной грани. Для двумерного случая в этом нетрудно убедиться с помощью рис. 3.1, б, учитывая, что отношение площадей треугольников $(1, 2, 3)$ и $(P, 2, 3)$ равно отношению их высот, поскольку оба треугольника имеют в качестве основания линию $(2, 3)$. Столь же геометрически очевидно и легко выводимо из выражений (3.2) и (3.3) равенство

$$\sum_{k=1}^{N+1} \xi_k = 1. \quad (3.4)$$

Эту линейную зависимость симплексных координат тоже нетрудно понять, поскольку их количество $(N+1)$ на единицу превышает требуемое для определения точки в N -мерном пространстве.

Переход от глобальных декартовых координат к локальным симплексным координатам легко осуществляется с помощью выражения (3.3). Допустим, например, что некоторый треугольник размещен в плоскости (x, y) . Тогда первая симплексная координата точки (x, y) равна

$$\xi_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}. \quad (3.5)$$

Разлагая первый определитель по минорам первого столбца, получаем

$$\xi_1 = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}. \quad (3.6)$$

Здесь A — площадь рассматриваемого треугольника. Вычисляя миноры, находим

$$\xi_1 = \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3}{2A} + \frac{y_2 - y_3}{2A} x + \frac{x_3 - x_2}{2A} y. \quad (3.7)$$

Аналогичные вычисления для остальных двух симплексных координат дают, таким образом, уравнение преобразования

$$2A \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Необходимо отметить, что симплексные координаты являются чисто локальными; выражение (3.3) определяет значения симплексных координат для данной точки, инвариантные относительно трансляции или поворота глобальной системы координат. Это свойство имеет огромное значение. Оно позволяет выполнить наибольшую часть математической формулировки уравнений для какого-либо треугольника; в дальнейшем эти результаты можно применять ко всем остальным треугольникам с помощью простых правил преобразования координат.

3.3. Интерполяция на симплексах

Для построения конечных элементов в задачах по определению потенциала требуются подходящие интерполяционные функции. Такие полиномы могут быть легко определены с помощью некоторого семейства вспомогательных полиномов $R(n)$. Член этого семейства с номером m определяется выражением

$$R_m(n, \xi) = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\xi - (k/n)}{(m/n) - (k/n)} = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (n\xi - k), \quad m > 0, \quad (3.9)$$

$$R_0(n, \xi) = 1.$$

Этот полином имеет нули при $\xi = 0; 1/n; \dots; (m-1)/n$ и принимает единичное значение при $\xi = m/n$. Другими словами, он имеет m эквидистантно расположенных нулей левее точки $\xi = m/n$ и ни одного нуля справа. На одномерном

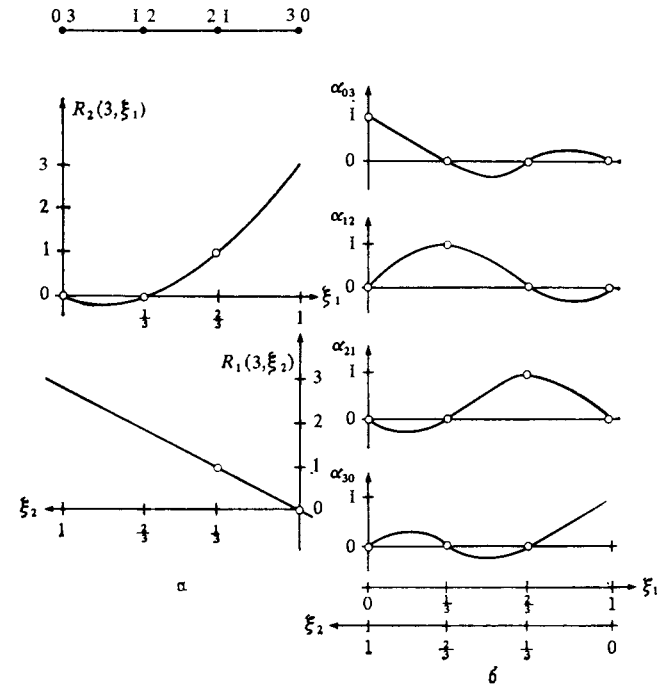


Рис. 3.2. а) Отрезок линии и полиномы $R_1(3, \xi)$ и $R_2(3, \xi)$, для которых $i + j = 3$, но которые не обращаются в нуль в узле 2.1. б) Графики четырех кубических интерполяционных полиномов для отрезка линии.

симплексе (линейный отрезок некоторой заданной длины) семейство полиномов степени n с n нулями можно определить формулой

$$\alpha_{ij} = R_i(n, \xi_1) R_j(n, \xi_2). \quad (3.10)$$

Здесь подразумевается, что $i + j = n$. Построение функций α_{ij} показано на рис. 3.2, а. Нетрудно увидеть, что они представляют собой не что иное, как интерполяционные полиномы Лагранжа, записанные в необычной форме. Можно также заметить, что каждый интерполяционный полином и каждый интерполяционный узел обозначаются двойным индексом, указывающим его местоположение в двух симплексных координатах. Этот способ обозначения подчеркивает связь между интерполяционными функциями и соответствующими интер-

поляционными точками и в то же время указывает на симметрию, присущую симплексу. На рис. 3.2, б показано полное семейство интерполяционных полиномов степени 3, построенных указанным способом.

Для треугольников применяется точно такой же метод. Интерполяционные функции определяются выражением

$$\alpha_{ijk} = R_i(n, \xi_1) R_j(n, \xi_2) R_k(n, \xi_3), \quad i + j + k = n. \quad (3.11)$$

Как и в предыдущем примере, результирующие полиномы являются интерполяционными на множествах регулярно расположенных точек, как показано на рис. 3.3. Нетрудно увидеть, что имеется

$(n+1)(n+2)/2$ таких точек на треугольнике и что естественная нумерация точек содержит три индекса. Во многих применениях многоиндексная нумерация является неудобной из-за большой длины индексных рядов, поэтому становится предпочтительной одноиндексная схема нумерации, даже если не ясно «высвечивается» геометрическая симметрия, присущая симплексу. Соответствующие одноиндексная и трехиндексная схемы нумераций также показаны на рис. 3.3.

Рис. 3.3. Расположение интерполяционных узлов на отрезках линии и треугольниках, демонстрирующее альтернативные (одноиндексные и многоиндексные) системы нумерации.

Полиномы, определяемые соотношениями (3.10), (3.11), обладают двумя свойствами, важными для построения конечных элементов. Во-первых, они определяются через симплексные координаты и поэтому остаются инвариантными при поворотах и трансляциях глобальной системы координат. Во-вторых, симплексные координаты охватывают одинаковый диапазон значений (от нуля до единицы) в любом симплексе, и, следовательно, большая часть рутинной работы при записи уравнений конечных элементов может быть выполнена в симплексных координатах один-единственный раз.

3.4. Плоские треугольные элементы

Различные задачи электромагнетизма могут рассматриваться как частные случаи неоднородного уравнения Гельм-

гольца

$$(\Delta + k^2)u = g \quad (3.12)$$

с различными граничными условиями, среди которых, вероятно, наиболее часто встречаются в приложениях однородное условие Неймана (обращение в нуль нормальной производной) и граничное условие Дирихле (заданные значения на границе). Как подробно показано в гл. 2, решения уравнения (3.12) определяют экстремальные значения функционала

$$F(U) = \frac{1}{2} \int (\nabla U)^2 d\Omega - \frac{1}{2} k^2 \int U^2 d\Omega + \int U g d\Omega \quad (3.13)$$

при условии, что пробные функции U непрерывны внутри области определения решения и удовлетворяют граничным условиям Дирихле для рассматриваемой задачи.

Для того чтобы построить приближенное решение задачи на основе треугольных элементов высокого порядка, используем процедуру, аналогичную использованной для элементов первого порядка. Область определения разбивается на треугольники и на каждом треугольнике потенциальная функция представляется в виде линейной комбинации аппроксимирующих (построенных выше) функций

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i,j,k} U_{ijk} \alpha_{ijk}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (3.14)$$

Каждая из этих аппроксимирующих функций обращается в нуль во всех узловых точках, за исключением связанного с ней узла, где она имеет единичное значение. Следовательно, коэффициенты в (3.14) равны значениям потенциалов в узлах интерполяции. Кроме того, потенциалы на границах элементов будут непрерывными. Покажем это следующим образом. Если $U(x, y)$ есть полиномиальная функция степени не больше n совокупно по x и y , то вдоль любой прямой линии в плоскости (x, y) функция $U = U(s)$ должна быть соответственно полиномом степени не больше n от расстояния s , измеренного вдоль прямой линии. Треугольный конечный элемент порядка n имеет $n+1$ узел вдоль каждой стороны треугольника. Так как U должно быть полиномиальной функцией степени n на каждой стороне треугольника, эти $n+1$ узловых значений фиксируют значение U на каждой стороне. Очевидно, что узлы на сторонах треугольников являются общими для каждой пары смежных треугольников. Поэтому изменение потенциала по любую сторону от границы между элементами определяется теми же самыми $n+1$ параметрами, и U оказывается непрерывным на границах элементов.

Теперь подробно остановимся на отдельном треугольном элементе, откладывая пока вопрос о связи между элементами

для формирования всей области определения решения. Подставляя аппроксимации (3.14) для U в выражение (3.13), преобразуем функционал $F(u)$ к виду

$$F(U) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_i U_j \int (\nabla \alpha_i)(\nabla \alpha_j) d\Omega - \frac{k^2}{2} \sum_i \sum_j U_i U_j \int \alpha_i \alpha_j d\Omega + \sum_i U_i \int \alpha_i g d\Omega. \quad (3.15)$$

Хотя это, вообще говоря, и не обязательно, вынуждающая функция $g(x, y)$ зачастую аппроксимируется на каждом треугольнике теми же полиномами, что и потенциал U

$$g = \sum_j g_j \alpha_j. \quad (3.16)$$

Существуют различные пути определения коэффициентов при этой аппроксимации. Например, может быть использована интерполяционная аппроксимация, когда коэффициенты являются просто значениями $g(x, y)$ в интерполяционных узлах. Используя аппроксимацию вида (3.16) и какой-либо метод для нахождения коэффициентов, можно выразить функционал $F(u)$ в следующей матричной форме:

$$F(U) = \frac{1}{2} U^T S U - \frac{k^2}{2} U^T T U + U^T T g. \quad (3.17)$$

Здесь U — вектор коэффициентов в разложении (3.14), а g — вектор коэффициентов в сумме (3.16); квадратные матрицы S и T определяются выражениями

$$S_{mn} = \int (\nabla \alpha_m)(\nabla \alpha_n) d\Omega, \quad (3.18)$$

$$T_{mn} = \int \alpha_m \alpha_n d\Omega. \quad (3.19)$$

Матрицы S и T , связанные с частной системой аппроксимирующих функций, иногда называют соответственно матрицей Дирихле и метрической матрицей. Аналогичные матрицы, применяемые в задачах упругости, называют соответственно матрицей жесткости и матрицей нагрузки.

Фундаментальным свойством функционала $F(U)$ является его стационарность. Поскольку $F(U)$ в виде (3.17) есть обыкновенная функция конечного числа переменных (компонент вектора U), требование стационарности приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial U_m} = 0 \quad (3.20)$$

для всех m , которым соответствуют нефиксированные компоненты U . Подставляя выражение (3.17) в уравнение (3.20) и

выполняя указанные дифференцирования, получаем матричное уравнение

$$S U - k^2 T U = -T g. \quad (3.21)$$

Решение этого уравнения для U определяет приближенное значение U в рассматриваемой области и, таким образом, является решением поставленной задачи.

3.5. Матрицы для треугольных элементов высокого порядка

Прежде чем продолжить решение задачи, необходимо вычислить элементы матриц S и T . Начнем с подынтегрального выражения (3.18), которое может быть записано в виде

$$S_{mn} = \int \left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial x} \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_m}{\partial y} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} \right) d\Omega. \quad (3.22)$$

Правило дифференцирования сложной функции позволяет записать

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \alpha_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x}. \quad (3.23)$$

Но из выражения (3.7) следует, что производная в правой части (3.23) равна

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2A}. \quad (3.24)$$

Используя формулы (3.23), (3.24) и записывая аналогичные выражения для производных по y , можно выразить соотношение (3.22) через функции от симплексных координат треугольника

$$S_{mn} = \frac{1}{4A^2} \sum_i \sum_j (b_i b_j + c_i c_j) \int \frac{\partial \alpha_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial \alpha_n}{\partial \xi_j} d\Omega. \quad (3.25)$$

Здесь A — площадь треугольника, а коэффициенты b_i и c_i равны

$$b_i = y_{i+1} - y_{i-1}, \quad (3.26)$$

$$c_i = x_{i-1} - x_{i+1}. \quad (3.27)$$

Везде выше нижние индексы изменяются от 1 до 3 соответственно трем вершинам треугольника. Двойное суммирование в выражении (3.25) может быть сведено к суммированию по одному индексу, если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} b_i b_j + c_i c_j &= -2A \operatorname{ctg} \theta_k, \quad i \neq j, \\ b_i^2 + c_i^2 &= 2A (\operatorname{ctg} \theta_j + \operatorname{ctg} \theta_k), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где θ_i — угол при вершине i , а i, j, k обозначают три вершины треугольника. (Доказательства этих тригонометрических

тождеств дано в приложении). Подстановка выражений (3.28) в формулу (3.25) дает

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^3 \operatorname{ctg} \theta_k \int \left(\frac{\partial a_m}{\partial \xi_{k+1}} - \frac{\partial a_m}{\partial \xi_{k-1}} \right) \left(\frac{\partial a_n}{\partial \xi_{k+1}} - \frac{\partial a_n}{\partial \xi_{k-1}} \right) \frac{d\Omega}{2A}. \quad (3.29)$$

Интеграл в правой части этого уравнения является безразмерным и содержит только величины, выраженные через симплексные координаты. Поскольку этот интеграл имеет универсальный характер, целесообразно выразить его через углы θ_k , представляя выражение (3.29) в виде

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^3 Q_{mn}^{(k)} \operatorname{ctg} \theta_k. \quad (3.30)$$

Три матрицы $Q^{(k)}$ являются числовыми и не зависят от размеров треугольника и его расположения, поэтому их можно вычислить и представить в виде таблиц. (Подробности процедуры интегрирования можно найти в приложении.)

Метрическую матрицу T (3.19) вычислить несколько проще, чем S . Поскольку элементы матрицы T имеют размерность площади, целесообразно вычислять матрицу t , определяемую выражением

$$t_{mn} = \frac{1}{2A} T_{mn} = \int a_m a_n \frac{d\Omega}{2A}, \quad (3.31)$$

где интеграл в правой части оказывается безразмерным и не зависит от размеров и положения треугольника. Матрица t также оказывается универсальной. Таким образом, использование симплексных координат позволяет записать метрическую матрицу и матрицу Дирихле универсальным способом, справедливым для любого треугольника. Его форма обуславливает значения коэффициентов-котангенсов прилегающих углов в трех вершинах, которые входят в матрицу S ; а размеры определяют общий множитель $2A$ в матрице T .

Интегрирования в выражениях (3.29), (3.31) выполнить сравнительно несложно. Записывая безразмерный элемент поверхности интегрирования $d\Omega/2A$ через симплексные координаты и интегрируя по частям, получаем

$$\int \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k \frac{d\Omega}{2A} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_1^i \xi_2^j (1 - \xi_1 - \xi_2)^k d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.32)$$

В приложении показано, что

$$\int \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k \frac{d\Omega}{A} = \frac{(i!) (j!) (k!) (2!)}{(i+j+k+2)!}. \quad (3.33)$$

Таким образом, полиномиальные подынтегральные выражения могут быть перемножены, а затем почленно проинтегрированы. Так как значения элементов матриц являются универсальными, матрицы были протабулированы для элементов вплоть до 6-го порядка. В табл. 3.1 представлены матрицы Q и t для элементов первых трех порядков.

Таблица 3.1. Матрицы t и $Q^{(1)}$ для треугольных элементов первого, второго и третьего порядков. Вследствие симметрии матриц оказалось возможным в верхней части каждой матрицы представить значения элементов матрицы t , а в нижней — матрицы Q , которые следует отнести к соответствующим общим знаменателям. Данные результаты приведены в International Journal of Engineering Science, 7, 849—861 (1969)

N=1		
Матрица	t	$Q^{(1)}$
Общий знаменатель	12	2

	2	1	1
0		2	1
0	1		2
0	-1	1	

N=2		
Матрица	t	$Q^{(1)}$
Общий знаменатель	180	6

	6	0	0	-1	-4	-1
0		32	16	0	16	-4
0	8		32	-4	16	0
0	-8	8		6	0	-1
0	0	0	3		32	0
0	0	0	-4	8		6
0	0	0	1	-4	3	

N=3		
Матрица	t	$Q^{(1)}$
Общий знаменатель	6720	80

Таблица 3.1. Продолжение

	76	18	18	0	36	0	11	27	27	11
0		540	270	-189	162	-135	0	-135	-54	27
0	135		540	-135	162	-189	27	-54	-135	0
0	-135	135		540	162	-54	18	270	-135	27
0	-27	27	135		1944	162	36	162	162	36
0	0	0	-162	324		540	27	-135	270	18
0	27	-27	27	-162	135		76	18	0	11
0	3	-3	3	0	-3	34		540	-189	0
0	0	0	0	0	0	-54	135		540	18
0	0	0	0	0	0	27	-108	135		76
0	-3	3	-3			-7	27	-54	34	

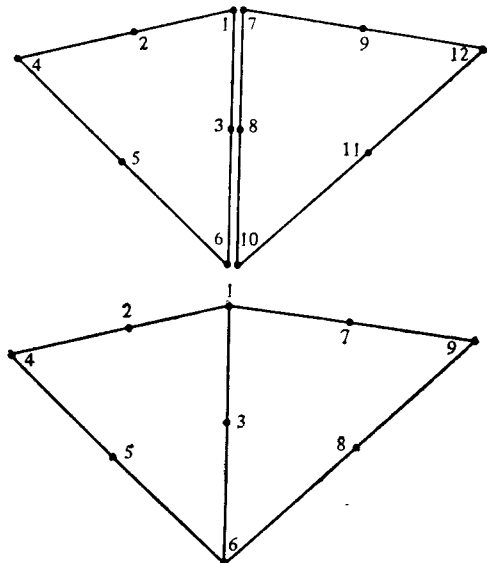


Рис. 3.4. Непрерывность потенциала между смежными элементами гарантируется совпадением потенциалов в прилегающих узлах.

3.6. Использование треугольных элементов высоких порядков

Объединение элементов следует тому же методу, что и в случае элементов первого порядка (см. разд. 1.4). Например, на рис. 3.4 показано объединение двух треугольных элементов второго порядка. Эта разъединенная пара элементов обладает двенадцатью независимыми узловыми потенциалами, тогда как соединенная пара — лишь девятью. Соответствующие векторы потенциалов связываются уравнением, аналогичным (1.23),

$$U_d = CU_c. \quad (3.34)$$

Здесь C — матрица связи, которая выражает ограничения, налагаемые на набор двенадцати потенциалов. Для случая, показанного на рис. 3.4,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Следуя тем же рассуждениям, приведенным в разд. 1.4, получаем для объединенной системы элементов матрицы S и T :

$$S = C^T S_d C, \quad (3.36)$$

$$T = C^T T_d C. \quad (3.37)$$

При численных расчетах матрица C обычно не хранится в виде (3.35) в памяти ЭВМ, поскольку она содержит в каждой строке единственный ненулевой элемент, равный единице. Одним из используемых методов хранения C в компактной форме является задание адресной последовательности, k -й вход которой указывает номер столбца с ненулевым элементом в k -й строке. В рассматриваемом примере C (3.35) должно бы быть представлено массивом из двенадцати числовых данных, т. е. в виде последовательности 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 3, 7, 6, 8, 9. Конечно, могут быть придуманы и другие схемы записи.

Нет необходимости также вычислять и хранить в памяти ЭВМ все три матрицы Q^n . Чтобы убедиться в этом, восстановим трехиндексную нумерацию интерполяционных узлов и функций и, соответственно, трехиндексную нумерацию матричных элементов. Вследствие симметрии, присущей трехиндексной нумерации (рис. 3.5), получаем следующие равенства:

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial a_{kij}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial a_{jki}}{\partial \xi_3}. \quad (3.38)$$

Это означает, что все производные, а потому и все матрицы Q^n могут быть получены из одной-единственной с помощью перестановки строк и столбцов, которая соответствует циклическому изменению тройных индексов. Поэтому каждая из трех матриц связана с другими двумя преобразованиями вида

$$Q^{(2)} = PQ^{(1)}P^T, \quad (3.39)$$

$$Q^{(3)} = PQ^{(2)}P^T = PP^{(1)}P^TP^T. \quad (3.40)$$

Рис. 3.5. Циклическая перестановка обозначений координат треугольника соответствует циклической перестановке обозначений узлов конечного элемента.

Здесь P обозначает соответствующую матрицу перестановки. Преобразования перестановки в матрицах $Q^{(n)}$ имеют ясный геометрический смысл, как можно увидеть из рис. 3.5. По приведенному выше определению P есть матрица, столбцы которой являются столбцами единичной матрицы, переставленными таким образом, чтобы соответствовать повороту треугольника относительно его центра против часовой стрелки. На рис. 3.5 такой поворот переносит точку 6 в место, ранее занимаемое точкой 1, точку 3 — в точку 2, точку 5 — в точку 3 и т. д. Соответственно матрица перестановки имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & 1 & \\ 1 & & & & & \\ & & 1 & & & \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Для краткости часто удобно обозначать преобразования перестановки оператором R , который символизирует требуемое отображение индексов

$$Q^{(2)} = RQ^{(1)}, \quad (3.42)$$

$$Q^{(3)} = RRQ^{(1)}. \quad (3.43)$$

Вследствие того что перестановки связаны с поворотами, вряд ли кого-либо удивит, что

$$Q^{(1)} = RRRQ^{(1)}, \quad (3.44)$$

поскольку при трех поворотах треугольника каждая точка этого треугольника должна отобразиться в саму себя.

Любая матрица перестановки P состоит из столбцов единичной матрицы, так что достаточно знать только местоположение (номер строки) ненулевого элемента в каждом столбце, чтобы передать всю информацию о ней. Таким образом, индексная последовательность $IS = 6, 3, 5, 1, 2, 4$ дает всю необходимую информацию для выполнения матричных преобразований типа (3.42) для элементов второго порядка. Действительно, само матричное преобразование численно выполняется наилучшим образом не как умножение, а как поисковая операция в последовательности индексов, которая заменяет одну последовательность индексов на другую. Например, многие варианты языка Фортран будут допускать вложенные индексы в виде $S(IS(M), IS(N))$.

Поскольку указанные три матрицы $Q^{(n)}$ легко получить из какой-либо одной, достаточно вычислить и хранить лишь одну из них. Кроме того, так как Q и t — симметричные матрицы, то фактически требуется хранить в памяти ЭВМ только часть их элементов.

3.7. Элементы высоких порядков для расчета волноводов

Как обсуждалось в гл. 2, электромагнитные волны в волноводе с идеально проводящими стенками, заполненном диэлектриком без потерь, описываются функциями u , которые удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k_c^2)u = 0, \quad (3.45)$$

где k_c^2 — критическое волновое число (см. разд. 2.7).

В данном случае метод конечных элементов приводит к матричному уравнению (3.21) с нулевой правой частью, учитывающему условия Дирихле или Неймана для ТМ- и ТЕ-волн соответственно. Ставится задача определения неизвестных значений k_c , составляющих бесконечный ряд собственных значений. Уравнение (3.21) решается стандартными

численными методами и дает конечный ряд собственных значений k , которые являются приближениями к части величин k_c , соответствующих бесконечному ряду. Собственные решения u соответствуют распределению поля в волноводе, как уже было объяснено в разд. 2.7.1. Можно ожидать, что треугольные элементы высокого порядка будут особенно хорошо подходить к задачам, где форма волновода представляет собой многоугольник, так как эта фигура может быть точно представлена объединением треугольников. Точность решений,

Таблица 3.2. Относительная погрешность определения критических частот первых восьми TM -волн в зависимости от порядка N и количества E треугольных элементов для волновода с сечением в виде правильного треугольника

Относительные значения критических частот ω_{ci}/ω_{ci}	Относительная погрешность определения ω_c , %			
	$N=1$ $E=144$	$N=2$ $E=36$	$N=3$ $E=16$	$N=4$ $E=9$
1,00000	1,46	0,122	0,017	0,002
1,41421	3,38	0,560	0,125	0,030
1,61245	3,81	0,73	0,24	0,045
1,84391	5,38	1,33	0,68	0,160
2,00000	7,25	2,13	0,95	0,63
2,23607	6,84	2,08	1,41	0,42
2,28035	8,04	2,70	1,34	0,70
2,40832	10,20	3,71	2,21	1,04

получаемых методом конечных элементов, может быть оценена сравнением с аналитическими решениями для волноводов, имеющих сечения прямоугольной и правильной треугольной формы. Прямоугольник может быть разбит на два или более треугольников, тогда как для треугольного волновода достаточно точные решения могут быть получены даже при использовании одного элемента высокого порядка.

Поскольку треугольные элементы первых шести порядков рассчитаны и протабулированы, исследователю остается в каждом случае решать дилемму: использовать несколько элементов высокого порядка или выбрать большее число элементов низкого порядка. Для того чтобы дать представление о поведении ошибки в определении спектра волн, в табл. 3.2 приведены погрешности, полученные при расчете критических длин первых восьми TM -волн волновода с поперечным сечением в виде правильного треугольника. Использовались элементы разных порядков, причем разбиение области на элементы проводилось таким образом, чтобы каждый раз порядок матричного уравнения равнялся 55. Следовательно, требуемые объем памяти и время счета были для всех случаев одинаковыми. Как видно из табл. 3.2, исполь-

зование нескольких элементов высокого порядка дает более точные результаты, чем расчеты с большим числом треугольников низкого порядка.

Волноводы с выпуклыми фигурами в сечениях не имеют областей, где могли бы возникать какие-либо сингулярности. Для таких случаев можно показать теоретически, что относительная погрешность e определяется формулой

$$e = Kh^{-2N}, \quad (3.46)$$

где h — максимальный размер любого элемента в модели, N — порядок полинома, K — постоянная, которая в общем случае неизвестна. Из формулы (3.46), как и из табл. 3.2, видно, что использование элементов высокого порядка обеспечивает более высокую точность, поскольку зависимость погрешности от размера (т. е. количества) элементов имеет степенной характер — экспоненциальный.

Для волноводов с невыпуклыми формами поперечного сечения, где имеются входящие острые углы, не существует аналитически разрешимого тестового примера. Однако расчеты можно сравнить с результатами экспериментальных измерений реальных волноводов. Несмотря на то что особенности поля, возникающие при невыпуклых формах сечений волноводов, приводят к потере точности, использование элементов высоких порядков все же остается предпочтительным.

Полиномиальные аппроксимирующие функции непрерывны на границах элементов, однако их производные могут иметь разрыв. Поэтому приближенные решения будут иметь характерные «складки» на границах элементов, когда аппроксимирующие возможности функций оказываются на пределе. Для примера на рис. 3.6 показаны распределения полей двух типов волн в прямоугольном волноводе, вычисленные для двух элементов пятого порядка. Основная TM -волна

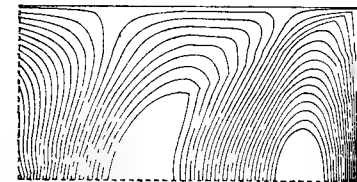
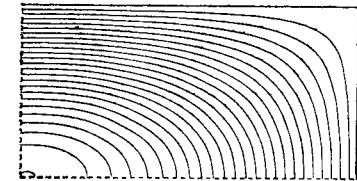


Рис. 3.6. Два типа волн прямоугольного волновода, который моделировался двумя треугольными элементами пятого порядка. а) Основная H -волна (TM). Несмотря на то что вблизи оси волновода наблюдается некоторая неточность, полученное распределение хорошо совпадает с аналитическим решением. б) Волна $H_{5,1}$ (TM). В отличие от случая основной волны, здесь ясно видно разбиение волновода на элементы.

(рис. 3.6, а) аппроксимируется очень хорошо. Структура поля волны на рис. 3.6, б должна бы соответствовать последовательности пяти распределений, подобных изображенной на рис. 3.6, а, но, очевидно, полиномы пятого порядка не могут удовлетворительно смоделировать такую сложную картину. Кроме того, на рис. 3.6, б явно просматриваются складки на диагонали межэлементного соединения.

3.8. Осесимметричные скалярные поля

Многие скалярные поля в изотропных, но неоднородных средах описываются неоднородным уравнением Гельмгольца

$$\operatorname{div}(p \nabla u) + k^2 u = g, \quad (3.47)$$

где p характеризует локальные свойства материала, например диэлектрическую проницаемость, удельное магнитное сопротивление, проводимость и т. п. Во многих задачах и функция источника g , и граничные условия обладают осевой симметрией; примерами могут служить соединения коаксиальных кабелей, высоковольтных изоляторов и резонаторов. В таких случаях математическая задача оказывается двумерной, так как достаточно найти распределение потенциала только в одной азимутальной плоскости. Однако двумерное дифференциальное уравнение и соответствующий функционал отличаются от своих трансляционно-однородных аналогов.

Как указывалось в гл. 2, такие граничные задачи решаются с помощью нахождения экстремума функционала

$$F(U) = \iint [p(\nabla U)^2 - k^2 U^2 + 2Ug] 2\pi r dr dz, \quad (3.48)$$

где дифференциальные и интегральные операции относятся только к координатам r и z . Этот функционал отличается от своего планарного аналога тем, что элемент площади содержит весовую функцию, равную r .

Допустим, что R есть область определения решения в плоскости (r, z) . Точно так же как и в двумерном планарном случае, разбиваем R на треугольные элементы и вычисляем интеграл (3.48) по каждому треугольнику. Как и раньше (см. разд. 3.4), аппроксимируем U и g на каждом треугольнике с помощью интерполяционных полиномов

$$U = \sum_{m=1}^n U_m \alpha_m, \quad (3.49)$$

$$g = \sum_{m=1}^n g_m \alpha_m. \quad (3.50)$$

Поскольку в подынтегральном выражении в формуле (3.48) имеется явная зависимость от координаты r , следует выразить эту величину через симплексные координаты. В пределах треугольного элемента r может быть представлено в виде линейной интерполяции с помощью трех его значений при вершинах

$$r = \sum_{i=1}^3 r_i \xi_i. \quad (3.51)$$

Подставляя это выражение в формулу (3.48), запишем функционал $F(U)$ в виде

$$F(U) = 2\pi \sum_{i=1}^3 r_i \iint \xi_i [p(\nabla U)^2 - k^2 U^2 + 2Ug] dr dz. \quad (3.52)$$

Производные по r и z следует преобразовать в производные по симплексным координатам, используя те же методы, что уже были успешно применены в планарном случае. Таким образом,

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{2A} \sum_{j=1}^3 b_j \frac{\partial U}{\partial \xi_j}, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2A} \sum_{j=1}^3 c_j \frac{\partial U}{\partial \xi_j}, \quad (3.54)$$

где A — площадь треугольника, коэффициенты

$$b_j = z_{j+1} - z_{j-1}, \quad (3.55)$$

$$c_j = r_{j-1} - r_{j+1}, \quad (3.56)$$

а индекс j равен номеру вершины треугольника. Подстановка этих выражений в (3.52) при использовании тождеств (3.28) дает

$$F(U) = 2\pi \sum_{i=1}^3 r_i \iint \xi_i \left[\frac{p}{2A} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_{j-1}} - \frac{\partial U}{\partial \xi_{j+1}} \right)^2 \operatorname{ctg} \theta_j - k^2 U^2 + 2Ug \right] dr dz. \quad (3.57)$$

Затем в это выражение следует подставить полиномиальные аппроксимации (3.49) и (3.50). Тогда условие стационарности функционала F

$$\frac{\partial F}{\partial U_i} = 0 \quad (3.58)$$

приводит к соотношениям

$$\sum_{i=1}^3 r_i \left\{ \frac{p}{A} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^3 Q_{mk}^{(il)} U_m \operatorname{ctg} \theta_l - 2k^2 \sum_{m=1}^n R_{mk}^{(i)} U_m + 2 \sum_{m=1}^n R_{mk}^{(i)} g_m \right\} = 0. \quad (3.59)$$

Здесь компоненты тензоров $Q^{(il)}$ и $R^{(i)}$ равны

$$Q_{mk}^{(il)} = \iint \xi_i \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_{l+1}} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_{l-1}} \right) \left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial \xi_{l+1}} - \frac{\partial \alpha_m}{\partial \xi_{l-1}} \right) dr dz, \quad (3.60)$$

$$R_{mk}^{(i)} = \iint \xi_i \alpha_m \alpha_k dr dz. \quad (3.61)$$

Эти формулы для коэффициентов выражены в симплексных координатах, и, следовательно, они представляют собой числовые матрицы, которые достаточно один-единственный раз вычислить и протабулировать. Конечно, когда элементы объединяются, должны быть определены размер, форма и положение треугольника относительно оси симметрии. На языке операторных уравнений соотношение (3.59) может быть записано в виде

$$SU - k^2 TU + Tg = 0, \quad (3.62)$$

который воспроизводит структуру матричного уравнения (3.21), отличаясь лишь выражениями для матриц S и T :

$$S = \frac{p}{2A} \sum_i \sum_l Q^{(il)} r_i \operatorname{ctg} \theta_l, \quad (3.63)$$

$$T = \sum_i r_i R^{(i)}. \quad (3.64)$$

В осесимметричном, но трансляционно-неинвариантном случае положение треугольника относительно глобальной системы координат имеет важное значение, тогда как в двумерном планарном случае его ориентация по отношению к координатным осям не влияет на уравнение (3.21). Это различие ясно отражается в выражениях (3.63) и (3.64), где местоположение и ориентация треугольника относительно глобальной системы координат выражены явно через значения радиальных координат вершин треугольников. С другой стороны, следует отметить, что смещение треугольника в z -направлении не изменяет матриц S и T . Подобная зависимость соответствует тому, что в осесимметричной задаче выбор начала координат является произвольным в z -направлении, тогда как точка $r=0$ обязательно должна быть помещена на оси симметрии.

При внимательном исследовании уравнения (3.51) можно заметить интересную возможность расширения диапазона использования осесимметричной формулировки. Поскольку

сумма трех симплексных координат равна единице, то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^3 \iint \xi_i f dr dz = \iint f dr dz. \quad (3.65)$$

Сравнивая это равенство с выражениями (3.60) и (3.61), определяющими $Q^{(il)}$ и $R^{(i)}$, видим, что суммирование по индексу i приводит к свертыванию девяти осесимметричных матриц $Q^{(il)}$ в три соответствующие матрицы трансляционно-симметричного случая. Аналогично суммирование трех матриц $R^{(i)}$ несимметричной задачи по индексу i дает матрицу T (3.19). Этот факт позволяет вывести матрицы для планарной задачи из матриц для осесимметричного скалярного случая.

Девять величин $Q^{(il)}$ и три величины $R^{(i)}$ обладают определенными свойствами симметрии, которые приводят к тому, что немногие из этих матриц являются линейно независимыми. Общие принципы подхода к этой проблеме такие же, как и в планарном случае, и отличаются лишь тонкостью деталей. Не приводя доказательства, отметим, что три матрицы $Q^{(il)}$ и одна $R^{(i)}$ оказываются независимыми и должны соответственно быть протабулированы.

3.9. Решение задачи для коаксиальной линии

Очевидно, что осесимметричные скалярные элементы идеально подходят для решения задач для неоднородных коаксиальных линий. В то же время сравнение с известными решениями задач для коаксиальных линий может выявить некоторые особенности этого метода. Простейшей задачей этого класса является задача для бесконечной коаксиальной линии, моделируемой прямоугольной областью в плоскости (r, z) с граничными условиями Неймана, налагаемыми на обеих сторонах, параллельных оси r , и граничными условиями Дирихле на остальных двух сторонах. Прямоугольная область удобно разбивается на треугольники, что позволяет легко получать приближенную оценку относительной точности при использовании элементов различных порядков, поскольку в этом случае известно аналитическое решение. В табл. 3.3 приведены относительные значения потенциала при изменении радиуса, полученные для шести различных разбиений области на элементы первых шести порядков.

Как видно из этой таблицы, решения первого порядка местами не достигают точности в две значащие цифры, тогда как решение второго порядка отличается от аналитического результата только в третьей цифре. Решение третьего порядка обеспечивает точность в три значащие цифры, а

решение четвертого порядка отличается от точного результата лишь в четвертой цифре. При использовании элементов пятого порядка наблюдается такая же точность решения, как и в случае элементов четвертого порядка, но поведение погрешности становится менее устойчивым.

При использовании элементов шестого порядка неустойчивое поведение погрешности выражено еще более явно. Тем

Таблица 3.3. Значения узловых потенциалов для коаксиальной структуры при использовании числа элементов E порядка N

r	$N=1$ $E=288$	$N=2$ $E=72$	$N=3$ $E=32$	$N=4$ $E=18$	$N=5$ $E=8$	$N=6$ $E=8$	Аналитическое решение
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2,0	0,7363	0,7334	0,7305	0,7283	—	0,7293	0,7298
2,2	0,7076	—	—	—	0,6922	—	0,6926
3,0	0,5782	0,5737	0,5716	0,5718	—	0,5717	0,5717
4,0	0,4652	0,4611	0,4593	0,4606	—	0,4593	0,4595
4,6	0,3948	—	—	—	0,4052	—	0,4050
5,0	0,3773	0,3736	0,3727	0,3723	—	0,3723	0,3723
5,8	0,3153	—	—	—	0,3144	—	0,3147
6,0	0,3053	0,3023	0,3017	0,3015	—	0,3015	0,3014
7,0	0,2438	—	—	—	0,2411	—	0,2413
8,0	0,1918	0,1898	0,1894	0,1893	—	0,1892	0,1893
8,2	0,1820	—	—	—	0,1797	—	0,1797
9,0	0,1453	0,1438	0,1435	0,1434	—	0,1433	0,1434
9,4	0,1282	—	—	—	0,1264	—	0,1264
10,0	0,1037	0,1026	0,1024	0,1023	—	0,1022	0,1023
10,6	0,0807	—	—	—	0,0796	—	0,0796
11,0	0,0660	0,0653	0,0652	0,0651	—	0,0651	0,0651
11,9	0,0383	—	—	—	0,0378	—	0,0378
12,0	0,0316	0,0313	0,0312	0,0312	—	0,0312	0,0312
13,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

самым показано, что ошибка дискретизации полностью исключается, тогда как ошибка округления, обусловленная конечной длиной слова, использованной при расчетах, является определяющим фактором в ограничении точности. В приведенных случаях порядки матриц были примерно одинаковыми и колебались в пределах от 150 до 175. Для этого численного эксперимента использовалась ЭВМ с 24-разрядной мантиссой с плавающей запятой, соответствующей приблизительно семи десятичным разрядам. Обычно в матричных задачах такого рода можно ожидать точность в четыре цифры при вычислениях с семью разрядами. Существуют два основных источника ошибки округления: накопление ошибки в многочисленных аддитивных процессах при построении матриц и накопление ошибки при решении систем уравнений. Ошибка округления в последнем случае может быть практически исключена посредством итерационной обработки процесса ре-

шения системы уравнений. Однако кроме выполнения всех вычислений с большей точностью других эффективных методов уменьшения ошибки, возникающих в процессе построения матриц, не существует.

3.10. Осесимметричные векторные поля

Многие задачи теории поля не удается описать скалярными потенциалами. В этих случаях необходимо решать задачу для векторной величины, которой может быть один из векторов полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ или индукций $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, а также векторный потенциал. В любом случае необходимо решать векторное уравнение Гельмгольца вида

$$(\Delta + k^2) \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (3.66)$$

где $\mathbf{A}$ — вектор, подлежащий определению, а $\mathbf{B}$ — известный вектор источника. Следует отметить, что Δ в уравнении (3.66) является «векторным» оператором Лапласа

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.67)$$

При этом функционал имеет вид

$$F(\mathbf{u}) = \int \{(\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 - (\mathbf{u} \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} - k^2 \mathbf{u}^2 + 2\mathbf{B} \mathbf{u}\} d\Omega - \oint [\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{u}] d\mathbf{S} \quad (3.68)$$

и достигает экстремума для вектора $\mathbf{u} = \mathbf{A}$ — решения уравнения (3.66) при условии, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет условию

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.69)$$

Как и в скалярном случае, наиболее общие типы граничных условий, встречающиеся на практике, приводят к обращению в нуль слагаемого с поверхностным интегралом

$$\oint [\mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{u}] d\mathbf{S} = 0. \quad (3.70)$$

В данном разделе будут рассмотрены только осесимметричные модели, в которых оба вектора $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ имеют лишь одну отличную от нуля азимутальную компоненту. Другими словами, вектор $\mathbf{u}$ запишем в форме

$$\mathbf{u} = u_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad (3.71)$$

где $\mathbf{e}_\phi$ — единичный вектор в азимутальном направлении. При таком ограничении условие (3.70) имеет вид

$$\oint u_\phi (\nabla u_\phi + u_\phi \nabla \ln r) d\mathbf{S} = 0. \quad (3.72)$$

Видно, что однородное условие Дирихле, требующее обращения в нуль u на поверхностях, обеспечивает выполнение равенства (3.72).

При указанных допущениях и ограничениях функционал (3.68) становится равным

$$F(u) = \int \left\{ r \left[\left(\frac{du_\varphi}{dz} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right)^2 - k^2 u_\varphi^2 + 2B_\varphi u_\varphi \right] + 2u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi^2}{r} \right\} d\Omega. \quad (3.73)$$

Здесь дифференцирование и интегрирование относятся только к переменным r и z . Этот функционал отличается от скалярного осесимметричного аналога также и тем, что он чрезвычайно неудобен, потому что содержит сингулярное слагаемое $1/r$, которое не допускает использования полиномиального разложения. Однако его можно привести к приемлемому виду заменой переменной, решая задачу для

$$u' = u_\varphi / \sqrt{r}. \quad (3.74)$$

Вместо B_φ удобно использовать функцию

$$B' = B_\varphi / \sqrt{r}. \quad (3.75)$$

В результате функционал (3.73) принимает вид

$$F(u') = \int r^2 \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 \right] dR + \frac{9}{4} \int (u')^2 dR - k^2 \int r^2 (u')^2 dR + 2 \int r^2 B' u' dR + \int r u' \frac{\partial u'}{\partial r} dR. \quad (8.76)$$

Здесь областью интегрирования снова является соответствующая часть плоскости (r, z) .

Для того чтобы развить метод конечных элементов для осесимметричной векторной задачи, остается подставить в (3.76) обычное полиномиальное разложение пробной функции

$$u' = \sum_j u'_j \alpha_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (3.77)$$

Эта громоздкая процедура здесь не будет выполняться. Отметим лишь, что все слагаемые в (3.76) теперь являются полиномами и поэтому интегрируются непосредственно. Более того, все интегралы в правой части (3.76) выражаются через симплексные координаты, так что эти интегралы вновь могут быть рассчитаны для некоторого стандартного треугольника. Форма, размеры и местоположение конкретного треугольника в конечном счете определяют лишь весовые коэффициенты. Общий подход в этом случае следует той же схеме, которая использовалась в случае скалярного поля.

3.11. Краткий обзор литературы

Конечные элементы высоких порядков впервые были использованы для решения задач теории упругости и в настоящее время нашли широкое применение почти во всех областях инженерных расчетов. Хороший начальный курс этих методов содержится в учебнике Десаи и Абеля [1].

Систематический подход к формированию интерполяционных функций на треугольных элементах для непосредственного применения их к решению задач для потенциалов был предложен Сильвестером на относительно раннем этапе развития метода конечных элементов [2].

Применения элементов высоких порядков для решения задач электромагнетизма оказались очень разнообразными. Одним из первых применений было решение волноводных задач [3]. Значительный интерес представило использование элементов высоких порядков в задачах диффузии (Капер, Лиф и Линдеман [4]). Большая программа, в которой используются элементы вплоть до шестого порядка, рассчитанная на широкое применение и ориентированная на дальнейшую обработку результатов в задачах теории поля, была изложена Кисаком и Сильвестером [5]. Мак-Олей [6] распространил эту методику на задачу о распространении волн в средах с потерями, а Стоун [7] и другие построили матрицы для задачи об акустических поверхностных волнах. Сообщалось о прямых решениях задач для потенциалов, например Андерсеном [8], который разработал большой пакет программ с широкими возможностями для осуществления управления входными и выходными данными.

Значительная часть работы, выполненная с симплексными переменными, привела к созданию табулированных универсальных матриц. Таким образом, в дополнение к приведенным здесь матрицам для планарного случая в литературе сообщалось о матрицах для осесимметричных случаев (Конрад и Сильвестер [9]). Общий подход к построению любых «универсальных» матриц из нескольких примитивных матриц был дан Сильвестером [10].

Глава 4

Конечные элементы для интегральных операторов

4.1. Введение

Значение статистического скалярного потенциала на расстоянии r от точечного заряда q в однородной среде с проницаемостью ϵ определяется формулой

$$V = q/(4\pi\epsilon r), \quad (4.1)$$

которая служит основой еще одного важного метода решения задач, альтернативного методу дифференциальных уравнений в частных производных, использованному выше для решения задач электромагнетизма. Если источниками электростатического поля являются объемный заряд, распределенный с плотностью ρ в данном объеме Ω , и поверхностная плотность заряда σ на заданной поверхности S , то скалярный потенциал, создаваемый этими источниками, в соответствии с (4.1) равен

$$V(r) = \int_{\Omega} \frac{\rho(r') d\Omega'}{4\pi\epsilon |r - r'|} + \int_S \frac{\sigma(r') dS'}{4\pi\epsilon |r - r'|}. \quad (4.2)$$

Это соотношение означает суммирование полей, создаваемых элементами заряда, находящимися в различных точках Q (которые определяются радиус-векторами r'), причем суммирование осуществляется в точке P , определяемой радиус-вектором r (рис. 4.1). Положение общей точки начала векторов r и r' произвольно и не имеет значения. Отметим, что размерность $r - r'$ соответствует вектору r_1 , введенному в разд. 2.2.1. Такой способ интегрирования целесообразно применять для конечных объемов. Как было показано ранее, выражение (4.2) удовлетворяет уравнениям Максвелла, поскольку оно соответствует уравнению Пуассона для потенциала (2.20). Однако задачи электростатики обычно формулируются не наложением условий на распределение зарядов, а заданием потенциалов проводящих электродов. При этом поверхностная плотность заряда σ и распределение потенциала $V(r)$ в межэлектродном пространстве считаются неизвестными. В таком случае, полагая, что объемный заряд отсутствует, выражение (4.2) можно переписать в виде интегрального уравнения для неизвестной плотности заряда

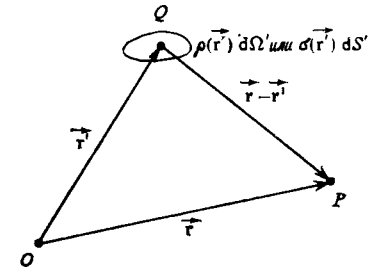
$$V_0(r) = \int_S \frac{\sigma(r') dS'}{4\pi\epsilon |r - r'|}, \quad (4.3)$$

в котором предполагается, что обе точки r и r' лежат на поверхности S , а функция $V_0(r)$ задана на поверхности S . Как правило, функция V_0 будет кусочно-постоянной, поскольку она описывает систему электродов, имеющих известные потенциалы. Исходя из физических представлений, можно полагать, что уравнение (4.3) однозначно определяет σ . Поэтому неизвестные поля в межэлектродном пространстве можно рассчитать, используя выражение (4.2). Функция

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon |r - r'|}, \quad (4.4)$$

которая входит в соотношения (4.2), (4.3) и представляет собой потенциал в точке r , создаваемый единичным точечным зарядом, находящимся в точке r' , называется *функцией Грина*, соответствующей в данном случае неограниченной однородной среде. Следует отметить, что в точке $r' = r$ функция Грина имеет особенность. Тем не менее из физических соображений можно полагать, что интеграл (4.3) существует, т. е. особенность является интегрируемой. Понятно, что следует с особым вниманием относиться к выбору алгоритмов для вычисления интегралов типа (4.3).

Рис. 4.1.



Можно доказать, что любые задачи электромагнетизма, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, независимо от наличия или отсутствия источников поля при заданных краевых условиях могут быть альтернативно сформулированы в виде интегральных уравнений. Для такой формулировки следует найти соответствующую функцию Грина. К сожалению, вид этой функции зависит от характера задачи. Тем не менее в данной главе рассматривается несколько задач, для которых функция Грина известна. Преимущества, обеспечиваемые схемами численных расчетов, основанными на применении интегральных операторов, состоят главным образом в уменьшении числа переменных при операциях с матрицами и исключении необходимости относить на бесконечность границы открытых систем. Выигрыш от уменьшения числа переменных несколько снижается вследствие того, что каждый конечный элемент обычно связан со всеми остальными элементами, так что матрицы в итоге получаются плотными.

4.2. Одномерные конечные элементы для интегральных уравнений электростатики

В этом разделе в качестве примера, иллюстрирующего применение методов интегральных уравнений в задачах, решаемых с помощью конечных элементов, рассматривается электростатическая задача для коаксиальной линии с произвольной постоянной формой поперечного сечения. Затем повторно исследуется частный случай линии с прямоугольным

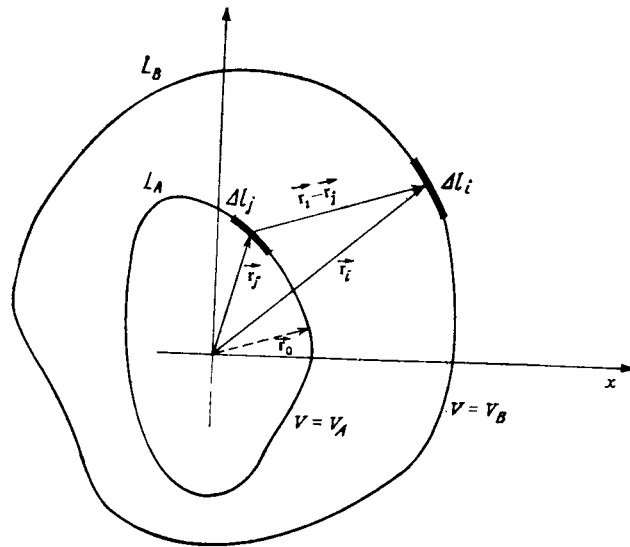


Рис. 4.2. Коаксиальная линия произвольного поперечного сечения. Сегменты, обозначенные i и j , находятся в данном случае на различных проводниках, но они могут располагаться и на одном и том же проводнике.

поперечным сечением, предварительно рассмотренный в разд. 2.5.

Для двумерной системы с трансляционной симметрией, к которой относится рассматриваемая коаксиальная линия, формулу (4.1) следует заменить формулой

$$V = -(q_l/2\pi\epsilon) \ln(r/r_0), \quad (4.5)$$

где q_l — погонная плотность заряда линейного источника, бесконечно протяженного в обоих направлениях, r определяет расстояние в плоскости сечения. Некий произвольный радиус r_0 введен для того, чтобы задать на некотором контуре нулевой уровень потенциала. При анализе трехмерной задачи с точечными источниками было принято, что нуль находится на бесконечности и никакой произвольной постоянной не требовалось. Здесь же, однако, видно, что потенциал V , определяе-

мый формулой (4.5), неограниченно возрастает при увеличении r . Физическая бессмысленность этого результата обусловлена невозможностью практической реализации истинно двумерной модели, бесконечной в осевом направлении.

Допустим, что в пространстве между двумя коаксиальными проводниками нет свободных зарядов. Тогда погонная поверхностная плотность заряда σ на контуре L , ограничивающем сечение волновода, где значение потенциала равно $V_0(\mathbf{r})$, будет определяться интегральным уравнением

$$V_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \int_L \sigma(\mathbf{r}') \ln \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{r_0} \right| dl', \quad (4.6)$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ радиус-векторы точек на контуре L , лежащие в плоскости сечения. Уравнение (4.6) можно непосредственно применить к геометрии задачи, показанной на рис. 4.2, если контур L отождествить с «суммой» контуров L_A и L_B , относящихся соответственно к внутреннему и внешнему проводникам коаксиальной линии. Потенциалы на контурах L_A и L_B обозначим соответственно через V_A и V_B .

4.2.1. Решение интегрального уравнения с помощью метода конечных элементов

Разделим контуры L_A и L_B в общей сложности на M отрезков. Присвоим отрезкам номера $i = 1, 2, 3, \dots, M$. Длину каждого отрезка обозначим через Δl_i , при этом они не обязательно должны быть одинаковыми. Предположим, что погонная поверхностная плотность заряда σ на каждом отрезке представлена некоторой функцией σ_i . Каждая функция $\sigma_i(\mathbf{r})$ будет считаться равной нулю вне своей подобласти Δl_i . Функция Грина для данной задачи имеет вид

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{r_0} \right|. \quad (4.7)$$

Тогда уравнение (4.6) можно записать в виде

$$V_0(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M \int_{\Delta l_i} \sigma_i(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl'. \quad (4.8)$$

Каждую функцию $\sigma_i(\mathbf{r}')$ внутри своей подобласти представим системой линейно независимых базисных функций p_{ik}

$$\sigma_i(\mathbf{r}') = \sum_{k=1}^n L_{ik} p_{ik}(\mathbf{r}'). \quad (4.9)$$

Теперь для определения коэффициентов L_{ik} можно применить метод Галёркина (он рассматривается также в разд. 6.3.4)

и таким образом найти распределение σ , которое и является решением задачи. Подставляя выражение (4.9) в формулу (4.8), умножая обе части равенства (4.8) на одну из базисных функций p_{jm} подобласти Δl_j и интегрируя по этой области, получаем

$$\int_{\Delta l_j} V_0(\mathbf{r}) p_{jm}(\mathbf{r}) dl = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^n L_{ik} \int_{\Delta l_j} \int_{\Delta l_i} p_{ik}(\mathbf{r}') p_{jm}(\mathbf{r}) \times \\ \times G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl' dl, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (4.10)$$

Левая часть уравнений (4.10) представляет известный вектор из $M \cdot n$ членов. Двойной интеграл в правой части этих уравнений также можно вычислить, хотя эти вычисления не очень простые. Таким образом, уравнение (4.10) можно представить в матричной форме

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{L}, \quad (4.11)$$

где $\mathbf{P}$ — квадратная числовая матрица порядка $M \cdot n \times M \cdot n$, а $\mathbf{L}$ — неизвестный вектор, представленный столбцом из $M \cdot n$ элементов, который можно определить из уравнения (4.11) с помощью обычных методов решения матричных уравнений. Зная вектор $\mathbf{L}$, можно с помощью формулы (4.9) восстановить распределение σ и затем определить, например, величину емкости C на единицу длины коаксиальной структуры, представленной на рис. 4.2. Следует отметить, что значение C определяется по полному заряду на одном из проводников

$$Q_A = \sum_{i=1}^{M_A} \int_{\Delta l_i} \sigma_i(\mathbf{r}) dl \quad (4.12)$$

с учетом соотношения

$$Q_A = C(V_B - V_A). \quad (4.13)$$

Таким образом, видно, что, получив весьма детальную информацию о векторе $\mathbf{L}$, мы усредняем значительную часть этих данных при вычислении емкости C .

4.2.2. Кусочно-постоянная аппроксимация

Во многих случаях достаточно считать распределение поверхностного заряда постоянным в пределах каждой подобласти, как показано на рис. 4.3. Этот случай рассмотрим подробнее. Уравнение (4.10) приобретает вид

$$\int_{\Delta l_j} V_0(\mathbf{r}) dl = \sum_{i=1}^M \int_{\Delta l_i} \int_{\Delta l_j} \sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl' dl, \quad (4.14)$$

где σ_i в пределах каждой подобласти является постоянной величиной. Обозначим $q_i = \sigma_i \Delta l_i$. Очевидно, что q_i представляет собой погонную плотность заряда на полоске шириной Δl_i одной из поверхностей коаксиальной линии. Обозначая

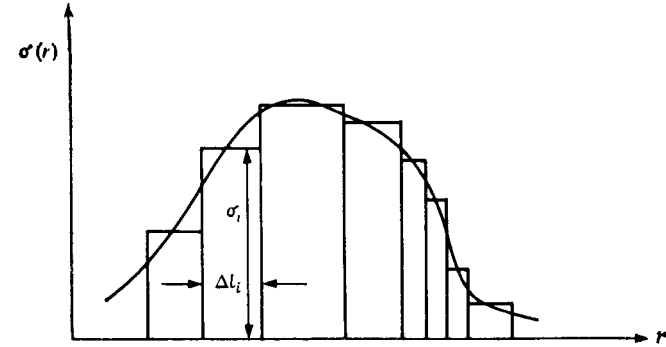


Рис. 4.3. Пример одномерной кусочно-постоянной аппроксимации функции $\sigma(r)$. Характерно, что ширина Δl_i может быть различной в разных подобластях.

через V_j усредненное значение потенциала j -й полоски, из уравнения (4.14) получаем

$$V_j = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{q_i}{\Delta l_i \Delta l_j} \int_{\Delta l_i} \int_{\Delta l_j} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl' dl, \quad (4.15)$$

что соответствует матричному уравнению вида

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{Q}, \quad (4.16)$$

в котором в данном случае M -компонентные векторы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{Q}$ соответствуют усредненному напряжению и поверхностному заряду. Используя выражение (4.7), определим матрицу $\mathbf{P}$ следующим образом:

$$P_{ij} = -\frac{1}{2\pi\epsilon \Delta l_i \Delta l_j} \int_{\Delta l_i} \int_{\Delta l_j} \ln \left| \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j}{r_0} \right| dl' dl. \quad (4.17)$$

Очевидно, что определяемые этим выражением элементы P_{ij} можно вычислить точно, используя при необходимости численное интегрирование. Однако можно выбрать настолько мелкое разбиение на элементы, что подынтегральное выражение в формуле (4.17) будет почти постоянным для каждого элемента. В таких случаях $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}'_j$ в подынтегральном выражении (4.17) следует заменить на $\bar{\mathbf{r}}_i$ и $\bar{\mathbf{r}}_j$, соответствующие положениям центров тяжести элементов. Такая аппроксимация не годится для особого случая $i = j$. Для

расчета P_{ii} достаточно рассмотреть прямолинейный элемент, совмещенный с одной из осей координат:

$$P_{ii} = -\frac{1}{2\pi\epsilon\Delta l_i^2} \int_0^{\Delta l_i} \int_0^{\Delta l_i} \ln \left| \frac{x-x'}{r_0} \right| dx dx'. \quad (4.18)$$

Несмотря на то что подынтегральное выражение в формуле (4.18) имеет особенность, двойное интегрирование приводит к следующему конечному результату

$$P_{ii} = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \left[\ln \frac{\Delta l_i}{r_0} - \frac{3}{2} \right]. \quad (4.19)$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для «почти сингулярных» случаев соседних подобластей i и j . Однако вычислять их нецелесообразно, поскольку погрешность, связанная с использованием простой формулы

$$P_{ij} = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_0} \right|, \quad (4.20)$$

никогда не превышает нескольких процентов. Таким образом, векторное уравнение

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{V} \quad (4.21)$$

можно в принципе применять для решения задачи о коаксиальном конденсаторе. Матрица $\mathbf{P}$ зависит от геометрии задачи, в то время как $\mathbf{V}$ является известным вектором: V_i равно V_A или V_B в зависимости от того, находится ли Δl_i соответственно на внутреннем или внешнем проводнике коаксиала. Отметим, что вектор $\mathbf{Q}$ имеет компоненты $q_i \Delta l_i$, причем свобода в выборе размеров элементов обеспечивает большие преимущества.

Теперь можно убедиться в том, что константа r_0 , введенная в выражение (4.5) для определения контура, на котором потенциал обращается в нуль, не влияет на решения уравнения (4.16). Из формулы (4.17) ясно, что r_0 приводит лишь к наличию постоянного слагаемого $(\ln r_0)/2\pi\epsilon$ во всех элементах матрицы $\mathbf{P}$. Таким образом, уравнение (4.16) можно записать в виде

$$V_j = \sum_{i=1}^M P'_{ij} q_i + \sum_{i=1}^M \frac{\ln r_0}{2\pi\epsilon} q_i. \quad (4.22)$$

Но $\sum_{i=1}^M q_i$ представляет собой равный нулю *полный* заряд системы. Поэтому ясно, что при описании матрицы $\mathbf{P}$ может быть использован любой конечный постоянный масштабный коэффициент,

4.2.3. Коаксиальная линия прямоугольного поперечного сечения

Сформулированные выше принципы непосредственно применимы к коаксиальной линии прямоугольного поперечного сечения, рассматривавшейся в разд. 2.5 для случая, когда пространство между проводниками однородно. Анализ, проведенный в гл. 2, показал, что можно использовать две плоскости симметрии, и это, естественно, справедливо и для рассматриваемого метода интегральных уравнений. Как видно

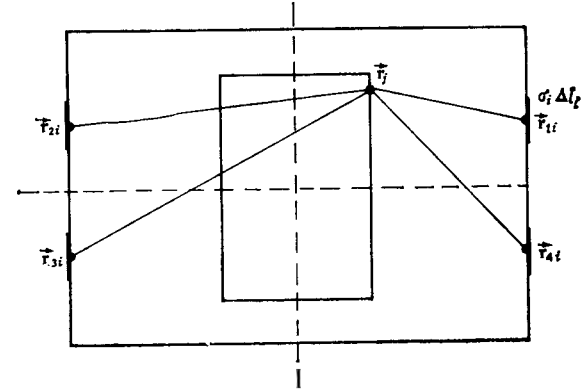


Рис. 4.4. Разбиение на секции прямоугольной коаксиальной линии.

на рис. 4.4, для каждого элемента Δl_i с центром в $\mathbf{r}_{1i}$, расположенного в первом квадранте и имеющего погонный поверхностный заряд $q_i = \sigma_i \Delta l_i$, существуют три других симметричных элемента с центрами в точках $\mathbf{r}_{2i}$, $\mathbf{r}_{3i}$ и $\mathbf{r}_{4i}$ в остальных квадрантах, причем эти элементы имеют точно такой же заряд. Следовательно, число неизвестных q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) должно соответствовать разбиению границы лишь в первом квадранте. Понятно, что при составлении такого уравнения, аналогичного (4.15) (в случае кусочно-постоянной аппроксимации), функцию Грина, используемую в уравнении (4.17), следует записать в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -(1/2\pi\epsilon) \{ \ln |\mathbf{r}_{1i} - \mathbf{r}'| + \ln |\mathbf{r}_{2i} - \mathbf{r}'| + \ln |\mathbf{r}_{3i} - \mathbf{r}'| + \ln |\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}'| \}. \quad (4.23)$$

4.3. Функция Грина для диэлектрической пластины

Одним из недостатков, присущих методам интегральных операторов, является то, что вид используемой функции Грина полностью определяется конкретной задачей. До сих пор мы рассматривали только простейший случай однородной

среды. Теперь рассмотрим диэлектрическую пластину и покажем, каким образом с помощью метода изображений для такой геометрии можно найти функцию Грина.

4.3.1. Диэлектрическое полупространство

Рассмотрим простой случай, когда полупространство $x < 0$ заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . Будем считать, что задача обладает двумерной симметрией и что на расстоянии a от поверхности $x = 0$ расположена нить с погонной плотностью заряда q . Этот заряд создает однородную по длине электрическую индукцию.

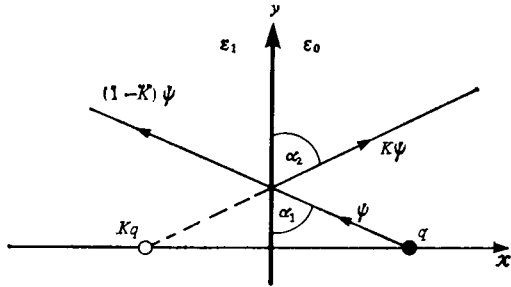


Рис. 4.5 Типичная силовая линия, обусловленная линейным зарядом, расположенным вблизи полубесконечной диэлектрической среды.

Рассмотрим типичную силовую линию поля («потока») ψ , показанную на рис. 4.5. Часть «потока» $K\psi$ отражается от поверхности диэлектрика, а оставшаяся часть $(1-K)\psi$ распространяется в диэлектрике. Значение K и направление линий потоков, отраженных от границы и проникающих в диэлектрик, можно найти из условий непрерывности электростатических полей, которые обсуждалась в разд. 2.1.3. Эти условия требуют, чтобы нормальная компонента вектора электрической индукции и тангенциальная компонента вектора электрического поля были непрерывны на границе раздела. Из рис. 4.5 видно, что непрерывность нормальной компоненты вектора электрической индукции приводит к равенству

$$(1-K)\psi \sin \alpha_1 = \psi \sin \alpha_1 - K\psi \sin \alpha_2. \quad (4.24)$$

Из этого уравнения следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$, т. е. углы падения и отражения «потока» электрической индукции должны быть равны. С другой стороны, непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля приводит к условию

$$\frac{1}{\epsilon_1} (1-K)\psi \cos \alpha_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \psi \cos \alpha_1 + \frac{1}{\epsilon_0} K\psi \cos \alpha_2, \quad (4.25)$$

так что для K имеем

$$K = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_1}{\epsilon_0 + \epsilon_1}. \quad (4.26)$$

Приведенный анализ показывает, что геометрические соотношения, определяющие поведение линий «потока» электрической индукции вблизи поверхности раздела диэлектриков, аналогичны законам оптики и что коэффициент отражения K имеет значение, соответствующее коэффициенту отражения в оптике. Установленное равенство углов приводит к кажущемуся существованию зеркальных изображений, как это показано на рис. 4.5. Линии «потока» в правой части от границы раздела кажутся исходящими из двух разных источников: исходного источника q и мнимого источника Kq , расположенного внутри диэлектрика на расстоянии a от поверхности раздела. Рассматривая теперь область $x < 0$, можно увидеть, что любые измерения в этой области покажут наличие единственного источника с зарядом $(1-K)q$, расположенного в правом полупространстве. Таким образом, для случая диэлектрического полупространства потенциал линейного источника будет иметь следующие значения:

$$V(x, y) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} [\ln \{(x-a)^2 + y^2\} + K \ln \{(x+a)^2 + y^2\}], \quad x > 0; \quad (4.27)$$

$$V(x, y) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_1} (1-K) \ln \{(x-a)^2 + y^2\}, \quad x < 0. \quad (4.28)$$

4.3.2. Диэлектрическая пластина

Метод, примененный здесь для пояснения способа построения функции Грина для диэлектрического полупространства, можно непосредственно применить и в случае пластины конечной толщины. На рис. 4.6 показано, как получаются многократные изображения, и видны различия в отображении заряда в каждой из трех областей, связанных с пластиной. Значения и положения отображенных зарядов читатель может легко вычислить, пользуясь принципами, сформулированными для случая изображений в полупространстве (рис. 4.5). Получив картину изображений для диэлектрической пластины, легко записать функции Грина в каждой из трех областей, разделенных поверхностями пластины, используя результирующую потенциальную функцию, представленную в виде бесконечного ряда

$$V(r) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi\epsilon} q_i \ln |r - r_i|, \quad (4.29)$$

где q_i — заряд, соответствующий i -му изображению (или в соответствующих случаях исходный заряд), расположенному

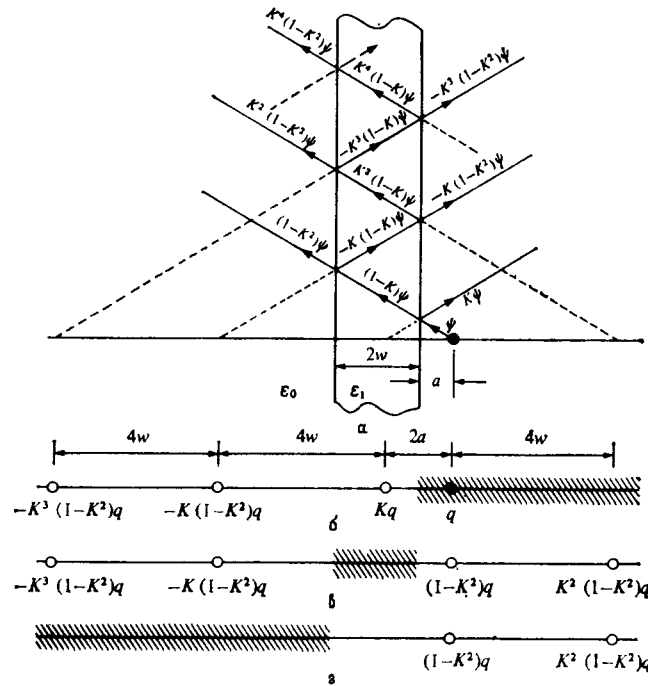


Рис. 4.6. а) Силовые линии, обусловленные линейным зарядом, расположенным вблизи диэлектрической пластины. б) Зеркальное изображение в области, содержащей заряд. в) Зеркальное изображение в области пластины. г) Зеркальное изображение в области слева от пластины.

в точке r_i . Отметим, что значение ϵ (ϵ_1 либо ϵ_0) должно соответствовать положению точки наблюдения r , а не точке изображения r_i .

4.3.3. Анализ микрополосковой линии

Рассматриваемыми здесь методами можно рассчитывать и параметры микрополосковых линий. Подход к решению основной задачи в теории микрополосковых линий, а именно к расчету емкости между полосками, разделенными диэлектриком (рис. 4.7), очевиден. Проводящие полоски разбиваются на части так же, как это делалось с поверхностями проводников коаксиальной линии с однородным диэлектрическим заполнением. Затем, как и ранее, составляется матричное уравнение типа (4.16), но теперь в уравнении (4.15) используется функция Грина, соответствующая бесконечному ряду

линейных зарядов (выражение (4.29)). Емкость линии можно определить путем суммирования отдельных зарядов, полученных на основе решения уравнения (4.16) для одного из электродов.

4.4. Вариационные выражения для интегральных операторов

Проведенный в предыдущих главах анализ, связанный с дифференциальными операторами, был основан исключительно на вариационном принципе. В данной главе с самого начала были использованы соответствующие интегральные операторы. Этот прямой метод дает возможность достаточно

просто использовать конечные элементы нулевого порядка, как, например, в разд. 4.2.2, где плотность заряда принималась постоянной на отдельных элементах границ. Применение аппроксимаций более высоких порядков, как было показано в разд. 4.2.1, оказывается более сложным. В этом разделе приведено удобное представление в вариационной форме интегральных уравнений, используемых в задачах электростатики. Рассматривая задачу об однородной коаксиальной линии, поставленную в разд. 4.2 настоящей главы, нетрудно показать, что функционал

$$F(\sigma') = \int_L V_0(r) \sigma'(r) dl + \frac{1}{2} \int_L \int_L \frac{\sigma'(r) \sigma'(r')}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{r-r'}{r_0} \right| dl dl' \quad (4.30)$$

экстремален при совпадении $\sigma'(r)$ с истинным распределением заряда σ . В этом можно убедиться, исследуя выражение (4.30) для случая, когда $\sigma' = \sigma + \delta\sigma$, где $\delta\sigma$ — произвольная функция радиус-вектора r на контуре L . Полагая $F(\sigma + \delta\sigma) = F(\sigma) + \delta F$, получим

$$\delta F = \int_L V_0(r) \delta\sigma(r) dl + \frac{1}{2} \int_L \int_L \frac{\sigma(r) \delta\sigma(r')}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{r-r'}{r_0} \right| dl dl' + \\ + \frac{1}{2} \int_L \int_L \frac{\sigma(r') \delta\sigma(r)}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{r-r'}{r_0} \right| dl dl' + \frac{1}{2} \int_L \int_L \frac{\delta\sigma(r) \delta\sigma(r')}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{r-r'}{r_0} \right| dl dl'. \quad (4.31)$$

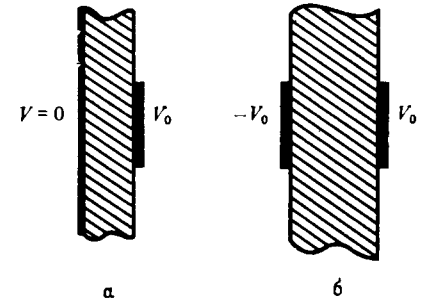


Рис. 4.7. Микрополосковая линия передачи. а) Ленточный проводник и диэлектрическая пластина на проводящей подложке. б) Эквивалентная по электрическим характеристикам линия передачи с двумя ленточными проводниками.

Поскольку функция Грина симметрична относительно радиус-векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, их можно менять местами при взятии интегралов в формуле (4.31), что позволяет упростить выражение для δF :

$$\delta F = \int_L \left[V_0(\mathbf{r}) + \int_L \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{r_0} \right| dl' \right] \delta\sigma(\mathbf{r}) dl + \\ + \frac{1}{2} \int_L \int_L \frac{\delta\sigma(\mathbf{r}) \delta\sigma(\mathbf{r}')}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{r_0} \right| dl dl'. \quad (4.32)$$

Линейное по $\delta\sigma$ слагаемое, являющееся *первой вариацией* функционала, обращается в нуль, поскольку $\sigma(\mathbf{r})$ удовлетворяет исходному интегральному уравнению (4.6). Из этого следует, что функционал F , определяемый выражением (4.30), действительно имеет экстремум (минимум) при $\sigma' = \sigma$.

Выражение (4.30) для функционала F можно использовать в вычислительных схемах, реализующих метод конечных элементов, так же, как это было сделано в предыдущих главах. Важно отметить, что используемые здесь конечные элементы являются одномерными и представляют собой отрезки дуги, в то время как при решении той же задачи с помощью дифференциальных операторов (см. разд. 2.5) необходимо использовать двумерные элементы. Следуя методике, принятой для функционалов с дифференциальными операторами, можно для функции σ использовать аппроксимации разных порядков в отличие от постоянных значений, принятых в разд. 4.2. Можно значения σ в узлах подобрать таким образом, чтобы они удовлетворяли требованию непрерывности, и далее выразить функционал через эти величины. Конкретные их значения, обеспечивающие минимум функционала, соответствуют наилучшему представлению пробной функции по отношению к истинному решению при выбранной системе пробных функций.

4.5. Интегральные уравнения в магнитостатике

Преимущества, которые дает формулировка задач теории поля с помощью интегральных уравнений, особенно важны для магнитостатики. Большой интерес представляет точный расчет магнитных полей, связанных со сложными магнитопроводами электрических машин. В настоящее время создан ряд программ, использующих уменьшение размерности и упрощение граничных условий, полученные благодаря реализации интегральных методов вместо методов, связанных с дифференциальными операторами.

4.5.1. Интегральное уравнение для намагниченности

Развиваемый здесь подход основан на использовании вектора намагниченности

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}. \quad (4.33)$$

Вектор $\mathbf{M}$ является мерой присущей материалу способности к намагничиванию, причем для разных материалов вектор $\mathbf{M}$ может быть отличным от нуля в случае отсутствия внешних полей либо наводиться источниками тока. Отметим, что случай $\mu = \mu_0$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ соответствует немагнитной среде. Действительно, в соответствии с (4.33) $\mathbf{M}$ при этих условиях обращается в нуль. Уравнение (4.33) можно записать в виде

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (4.34)$$

из которого следует, что магнитная восприимчивость χ равна

$$\chi = \mu/\mu_0 - 1. \quad (4.35)$$

Во многих случаях величина χ будет зависеть от $\mathbf{H}$. Напряженность магнитного поля в уравнении (4.33) можно разделить на две части

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_M, \quad (4.36)$$

где часть $\mathbf{H}_S$ обусловлена действием источников тока, а $\mathbf{H}_M$ связана с намагниченностью, наведенной в материале. Так как по предположению $\mathbf{H}_S$ не зависит от свойств материала, то этот вектор должен определяться распределенными в свободном пространстве токами

$$\mathbf{H}_S(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (4.37)$$

Данное выражение по существу представляет собой формулировку хорошо известного закона Био — Савара (см. разд. 2.2). Векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ являются соответственно радиус-векторами точек наблюдения OP и источника OQ , как показано на рис. 4.1. Интегрирование выполняется по пространственной области Ω , в которой содержатся все источники тока, и относительно переменной $\mathbf{r}' = (x', y', z')$.

Выражение (4.37) является решением уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H}_S = \mathbf{J}. \quad (4.38)$$

За подробным доказательством этого утверждения читатель может обратиться к учебникам по электромагнетизму, например к книге Страттона (см. [1]). Поскольку уравнение Максвелла для случая постоянных полей имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (4.39)$$

ясно, что поле намагничивания $\mathbf{H}_M$ является безвихревым, т. е. $\text{rot } \mathbf{H}_M = 0$. Это означает, что вектор $\mathbf{H}_M$ можно представить в виде градиента скалярной функции — потенциала P

$$\mathbf{H}_M = -\nabla P. \quad (4.40)$$

Величина P составляет лишь часть скалярного потенциала, поскольку $\mathbf{H}_M$ не представляет полного магнитного поля. Для областей, где нет тока, P аналогично скалярному магнитному потенциалу, введенному в разд. 2.2.2. Из уравнения (4.33) следует, что

$$\mathbf{H}_M + \mathbf{H}_S = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (4.41)$$

Поскольку вектор $\mathbf{H}_S$ представляет магнитное поле в свободном пространстве, выполняется равенство $\text{div } \mathbf{H}_S = 0$. Поэтому операция дивергенции, примененная к обеим частям уравнения (4.41), дает

$$\text{div } \mathbf{H}_M = -\text{div } \mathbf{M}. \quad (4.42)$$

С помощью соотношений (4.40) и (4.42) получаем определяющее дифференциальное уравнение в частных производных для скалярного потенциала, которое является уравнением Пуассона:

$$\Delta P = \text{div } \mathbf{M}. \quad (4.43)$$

Это уравнение аналогично уравнению Пуассона для электростатического потенциала в случае однородного диэлектрика

$$\Delta V = -\rho/\epsilon. \quad (4.44)$$

Как было показано выше, решение этого уравнения в объеме Ω , ограниченном поверхностью S , имеет вид

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\Omega'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}') dS'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.45)$$

Заметим, что объемный и поверхностный заряды можно представить через электрическую индукцию $\mathbf{D}$ с помощью соотношений $\rho = \text{div } \mathbf{D}$, $\rho_S dS = -\mathbf{D} dS$. Выражение (4.45) приобретает в этом случае вид

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\text{div}' \mathbf{D}(\mathbf{r}') d\Omega'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_S \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}') dS'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.46)$$

Имея в виду аналогичность уравнений (4.43) и (4.44), когда величина $\text{div } \mathbf{M}$ соответствует $-\rho/\epsilon = -\text{div } \mathbf{D}/\epsilon$, а $\mathbf{M}$ соответствует $-\mathbf{D}/\epsilon$, нетрудно понять, что решение уравнения (4.43) для скалярного магнитного потенциала P определяется выражением

$$P(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_M} \frac{\text{div}' \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\Omega'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_M} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4.47)$$

Здесь мы полагаем, что весь магнитный материал находится внутри объема Ω_M , ограниченного поверхностью S_M , а оператор div' действует только на функции от $\mathbf{r}'$. Для преобразования второго слагаемого в правой части выражения (4.47) можно воспользоваться теоремой Остроградского — Гаусса (см., например, книгу Райли [2], с. 100), так что

$$P(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_M} \frac{\text{div}' \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\Omega'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_M} \text{div}' \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\Omega'. \quad (4.48)$$

Преобразуя это выражение в соответствии с правилом векторного исчисления $\text{div}(\psi \mathbf{F}) = \psi \text{div } \mathbf{F} + \mathbf{F} \nabla \psi$, находим

$$P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_M} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\Omega' \quad (4.49)$$

или в более явной форме

$$P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_M} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'. \quad (4.50)$$

Имея в виду связь между $\mathbf{H}_M$ и P в (4.40), с помощью выражения (4.50) получаем

$$\mathbf{H}_M(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\Omega_M} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega', \quad (4.51)$$

где оператор градиента ∇ относится, конечно, к координатам без штрихов. Следовательно, с помощью выражений (4.36), (4.37) и (4.51) можно представить уравнение (4.34) в виде

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{\chi(\mathbf{r})}{4\pi} \left\{ \int_{\Omega_J} \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' - \nabla \int_{\Omega_M} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega' \right\}. \quad (4.52)$$

Это и есть интегральное уравнение, которое определяет неизвестный вектор $\mathbf{M}$ через заданные значения χ и $\mathbf{J}$.

4.5.2. Применение интегрального уравнения намагниченности

Рассмотрим теперь задачу об определении магнитного поля проводников с током, расположенных параллельно длинному стержню из ферромагнитного материала. Это двумерная задача, для которой в направлении продольной оси (например, z) физические условия не изменяются. В соотношении (4.50) можно взять интеграл по z' и получить следующее выражение для скалярного магнитного потенциала:

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dx' dy', \quad (4.53)$$

где теперь $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ соответствуют двумерным радиус-векторам. Подставляя выражение (4.53) в уравнение (4.40), получим

$$\mathbf{H}_M = -\frac{1}{2\pi} \iint \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^4} \{2\mathbf{M}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} \right) dx' dy'. \quad (4.54)$$

Для пояснения на рис. 4.8 приведена конкретная геометрия задачи, включающая два проводника с током, параллельные

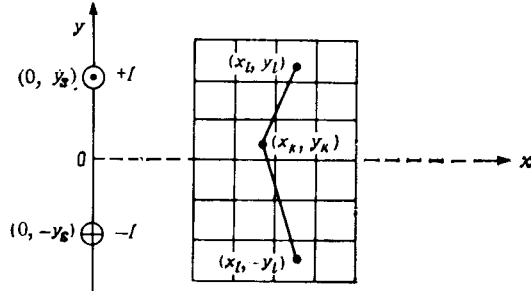


Рис. 4.8. Геометрия токонесущих проводников, параллельных стальной стержню.

прямоугольному стержню. Поле источника $\mathbf{H}_S$ в точке (x_k, y_k) можно записать в виде

$$H_{S_k}^{(x)} = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{y_s - y_k}{x_k^2 + (y_k - y_s)^2} + \frac{y_s + y_k}{x_k^2 + (y_k + y_s)^2} \right], \quad (4.55)$$

$$H_{S_k}^{(y)} = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{x_k}{x_k^2 + (y_k - y_s)^2} - \frac{x_k}{x_k^2 + (y_k + y_s)^2} \right]. \quad (4.56)$$

В общем случае (когда зеркальной симметрии может не быть) предположим, что поперечное сечение стержня разделено на N элементов. Обозначим произвольную точку внутри l -го элемента через $\mathbf{r}'_l$, $l = 1, 2, \dots, N$. Примем в качестве упрощения, что намагниченность внутри каждого элемента постоянна. Далее будем считать (и это предположение будет тем ближе к истине, чем больше число элементов), что намагниченность в точке $\mathbf{r}'_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, является суммой составляющих от каждого элемента $l = 1, 2, \dots, N$ (включая также k -й элемент, в котором по предположению находится точка $\mathbf{r}_k$). Используя уравнение (4.54), эту сумму можно представить в виде

$$\mathbf{H}_{Mk} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N \iint \left(\frac{\mathbf{M}_l}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}'_l|^2} - \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}'_l}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}'_l|^4} \{2(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}'_l) \mathbf{M}_l\} \right) dx'_l dy'_l. \quad (4.57)$$

Так как вектор намагниченности $\mathbf{M}_l$ считается постоянным в пределах каждого элемента, то интегрирование в выражении (4.57), хотя оно довольно непростое, может быть выполнено (см. работу Ньюмана, Трубриджа и Тернера [3]). Результат интегрирования полностью определяется геометрией элементов. Элементы не обязательно должны быть прямоугольными, как это было принято здесь. Интегрирование в пределах каждого отдельного элемента следует выполнять относительно некоторой базисной точки $\mathbf{r}_l$. Если базисные точки для интегрирования выбраны так, что они совпадают с точками $\mathbf{r}_k$, то очевидно, что при таком совмещении можно записать следующее уравнение:

$$\mathbf{H}_{Mk} = \sum_{l=1}^N \mathbf{C}_{kl} \mathbf{M}_l, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.58)$$

Символом $\mathbf{C}_{kl}$ обозначен тензор второго ранга

$$\mathbf{C}_{kl} = \begin{bmatrix} C_{kl}^{xx} & C_{kl}^{xy} \\ C_{kl}^{yx} & C_{kl}^{yy} \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

который в уравнении (4.58) производит операцию над вектором $\mathbf{M}_l$, образуя вектор

$$\mathbf{C}_{kl} \mathbf{M}_l = (C_{kl}^{xx} M_l^x + C_{kl}^{xy} M_l^y, C_{kl}^{yx} M_l^x + C_{kl}^{yy} M_l^y). \quad (4.60)$$

Точка совмещения может быть выбрана где угодно в пределах данного элемента. Однако интуиция подсказывает, что для наиболее эффективной аппроксимации при данном размере элемента точку совмещения следует располагать в центре элемента.

Итак, задача о нахождении намагниченности представлена в дискретной форме, поскольку на основании уравнений (4.43) и (4.36) можно записать

$$\mathbf{M}_k = \chi(\mathbf{r}_k) \left[\mathbf{H}_{S_k} + \sum_{l=1}^N \mathbf{C}_{kl} \mathbf{M}_l \right] \quad (4.61)$$

или

$$\mathbf{H}_{S_k} = \sum_{l=1}^N [\mathbf{C}_{kl} + \delta_{kl} / \chi(\mathbf{r}_k)] \mathbf{M}_l. \quad (4.62)$$

Здесь введен символ Кронекера $\delta_{kl} = 1$ при $k = l$ и $\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$. Уравнение (4.62) имеет матричную форму, и оно может быть обращено для получения $\mathbf{M}_l$.

Теперь рассмотрим следствия симметрии задачи, показанной на рис. 4.8. В силу симметрии намагниченность в точках (x_l, y_l) и $(x_l, -y_l)$ одинакова. Поэтому ясно, что число неизвестных компонент $\mathbf{M}$ соответствует количеству элементов в

области $y > 0$. Уравнение (4.57), из которого определяются коэффициенты C_{kl} , следует преобразовать таким образом, чтобы ввести дополнительные слагаемые, получаемые при замене $\mathbf{r}'_l = (x'_l, y'_l)$ на $(x'_l, -y'_l)$. При этом для получения H_{ml} суммирование выполняется по индексу $l = 1, 2, \dots, N$, соответствующему лишь элементам в области $y_l > 0$.

Если желательно учесть нелинейные свойства материала, уравнение (4.62) можно решать последовательными приближениями, начиная с предполагаемого решения, которое при заданных $B-H$ -характеристиках материала позволяет оценить $\chi(\mathbf{r}_k)$.

Описанный здесь метод решения двумерных задач легко распространить на трехмерные случаи. Он лежит в основе программы GFUN, составленной Ньюманом и др. [3]. Этот удачный метод может рассматриваться как альтернативный по отношению к описанным в гл. 5 методам, основанным на вариационном способе решения дифференциальных уравнений в частных производных. Одно из принципиальных достоинств метода интегральных уравнений заключается в данном случае в том, что разбиение пространства на конечные элементы необходимо производить лишь в пределах ферромагнитного материала.

4.6. Использование конечных элементов в теории антенн

Проектирование и анализ радиоантенн относятся к установившейся области радиотехники и основываются на теории электромагнитного поля. Работы по проектированию и анализу антенн получили мощный толчок благодаря развитию цифровой вычислительной техники, поскольку это дало возможность сравнительно легко решать многие ранее недоступные задачи. Наиболее важным численным методом решения получаемых при анализе антенн интегральных уравнений является метод моментов, который по существу совпадает с методом конечных элементов и кратко здесь рассматривается. При желании глубоко изучить данный вопрос следует обратиться, например, к труду Баланиса [4]. Основная задача, с которой сталкивается разработчик антенн, — это расчет распределения токов в некоторой антенной решетке. Каждый элемент решетки возбуждается либо непосредственно, либо посредством электромагнитного излучения других элементов. Если распределение токов найдено, не существует серьезных трудностей в определении диаграммы направленности передающей решетки. Она может быть рассчитана, например, по уравнению (2.23), даже если интегрирование выражения для векторного потенциала $\mathbf{A}$ окажется сложным.

С другой стороны, знание токов во всех элементах антенны определяет характеристики приемной антенны как элемента электрической цепи.

4.6.1. Уравнение Поклингтона

Интегральные уравнения являются одними из наиболее эффективных средств численного анализа линейных антенн. Примечательно, что они применялись еще в те дни, когда теория электромагнитного поля только создавалась (см. статью Поклингтона [5]¹⁾). Рассмотрим цилиндрический проводник, диаметр которого мал как по сравнению с его длиной, так и по сравнению с длиной электромагнитной волны в свободном пространстве. Примем вполне разумное допущение, что ток направлен исключительно вдоль оси и азимутально симметричен. Будем пренебрегать краевыми эффектами и, предполагая проводимость идеальной, будем считать все токи протекающими по цилиндрической поверхности. Результаты Поклингтона получаются при условии, что векторный потенциал $\mathbf{A}$, обусловленный током, протекающим вдоль образующей цилиндра, направлен вдоль оси z .

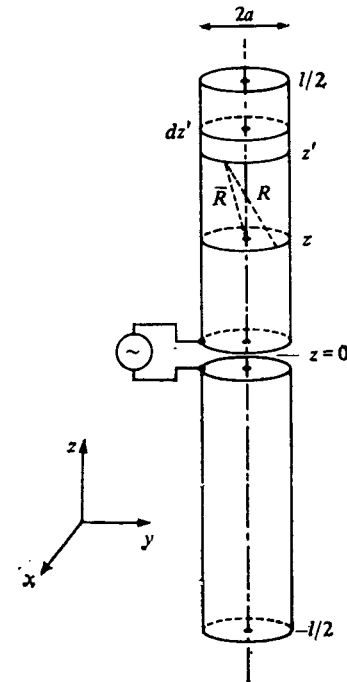


Рис. 4.9. Геометрия проволочной антенны.

Используя решение уравнений Максвелла в виде запаздывающих потенциалов (2.23) для системы, изображенной на рис. 4.9, выразим A_z через интеграл по объему цилиндра

$$A_z(x, y, z) = \mu_0 \int \frac{J_z(x', y', z')}{4\pi R} e^{-ikR} d\Omega'. \quad (4.63)$$

¹⁾ Интересно отметить, что в этом же томе журнала Дж. Дж. Томсон публикует статью о катодных лучах, из которой очевидно, что когда он был как раз на пороге догадки о существовании электрона. Сразу же после статьи Поклингтона К.Т.Р. Вильсон пишет об экспериментах с его камерой по обнаружению лучей, излучаемых ураном.

Здесь предполагается, что $R = |r - r'|$ и $k = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$. Выражение (4.63) для A_z имеет такой вид, как будто эта величина изменяется и в плоскости (x, y) , а объемный интеграл берется не только по dz' , но и по $dx'dy'$. Однако поскольку ток равномерно распределен по поверхности цилиндра радиуса a , то из выражения (4.63) можно получить хорошее приближение для

$$A_z(z) = \mu_0 \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z') e^{-ik\bar{R}}}{4\pi\bar{R}} dz', \quad (4.64)$$

где

$$\bar{R} = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}. \quad (4.65)$$

В соответствии с уравнением (2.17) z -компонента электрического поля на поверхности цилиндра, обусловленная принятым распределением тока, равна

$$E_z^s = -\frac{\partial V}{\partial z} - i\omega A_z, \quad (4.66)$$

где V — скалярный потенциал электрического поля. Но, используя калибровку Лоренца (2.19), получим

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 i\omega V. \quad (4.67)$$

Таким образом,

$$i\omega \epsilon_0 E_z^s = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon_0 A_z. \quad (4.68)$$

Подставляя в это уравнение выражение (4.64) для A_z , получаем интегральное уравнение Поклингтона для распределения тока

$$i\omega \epsilon_0 E_z^s = \int_{-l/2}^{l/2} \left[I(z') \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \frac{e^{-ik\bar{R}}}{4\pi\bar{R}} \right] dz'. \quad (4.69)$$

4.6.2. Решение методом конечных элементов

Если рассматриваемый цилиндр изолирован и возбуждается в точке $z = 0$, то тангенциальная составляющая поля E_z^s на идеально проводящей поверхности везде, кроме зазора, необходимого для возбуждения, обращается в нуль. Простейшее численное решение получается путем деления половины антенны длиной $l/2$ на M конечных элементов, в пределах каждого из которых $I(z')$ принимает постоянные значения $I_1, I_2, \dots, I_M$. Подставляя эти значения в уравнение (4.69) и выполняя интегрирование по z' , можно выбрать также M значений z — по одному в пределах каждого конечного элемента, в которых известно E_z . Величина E_z в этом примере обра-

щается в нуль всюду, кроме области возбуждения. Очевидно, что можно составить векторное уравнение

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}, \quad (4.70)$$

которое может быть решено относительно неизвестных токов $\mathbf{I} = [I_1, I_2, \dots, I_M]$.

Эта процедура полностью повторяет ход решения рассмотренной более подробно электростатической задачи и соответствует решению Галёркина нулевого порядка. В этом случае также можно использовать аппроксимации более высоких порядков и полностью реализовать процедуру Галёркина. Определив распределение токов $I(z')$ (неважно в каком приближении), нетрудно вычислить такие практически важные параметры, как входной импеданс и диаграмму направленности. Рассматриваемый цилиндр мог бы представлять собой часть многоэлементной решетки, в которой часть элементов являются паразитными и по крайней мере один возбуждается заданным способом. Тогда E_z^s представляет только поле, обусловленное током в самом этом элементе. К E_z^s следует прибавить наведенную составляющую E_z^i , обусловленную токами в остальных элементах. При этом везде, кроме точек возбуждения, сумма этих составляющих должна обращаться в нуль

$$E_z^i + E_z^s = 0. \quad (4.71)$$

С помощью данного соотношения можно найти E_z^s из уравнения (4.68). Система векторных уравнений соответственно увеличивается, но тем не менее по-прежнему остается разрешимой. Изложенная здесь теория применяется к отдельным прямолинейным элементам одинаковой формы. Ясно, однако, что за счет некоторого усложнения программы можно рассчитывать антенные решетки, составленные из неодинаковых и криволинейных элементов.

4.7. Краткий обзор литературы

Книга Харрингтона [6] представляет собой одну из первых работ, в которой рассматривались основы расчета полей с помощью метода, получившего ныне название «метод конечных элементов». В этой книге, в частности, достаточно подробно обсуждается решение интегральных уравнений электростатики. Однако в настоящей книге рассмотрение задач электростатики основывается на статьях Сильвестера [7] и Бенедика и Сильвестера [8]. Для расчета проволочных антенн методы конечных элементов высокого порядка применены Сильвестером и Ченом [9], а для расчета рефлектор-

ных антенн — Хассаном и Сильвестером [10]. Монография под редакцией Чари и Сильвестера [11] содержит написанную К. Трубриджем главу «Применение методов интегральных уравнений к задачам магнитостатики и расчету вихревых токов», имеющую прямое отношение к разд. 4.5. В той же монографии содержится работа Б. Макдональда и А. Векслера, в которой авторы развили новую теорию, связанную с решением задач, сформулированных с помощью дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Применение интегральных уравнений в теории антенн рассматривалось Баланисом [4] в его фундаментальной работе по теории и конструированию антенн.

Глава 5

Дифференциальные операторы для ферромагнетиков

5.1. Функционалы для магнитных полей

К числу задач электромагнетизма, где широко применяется метод конечных элементов, относятся задачи расчета нелинейных магнитных цепей (применительно к электрическим машинам, трансформаторам и другим силовым устройствам). Нелинейности в таких задачах обычно однопараметрические и имеют монотонный характер или по крайней мере могут считаться таковыми. Поэтому для расчетов можно эффективно использовать сравнительно простые методы.

Как было показано в гл. 2, задачи о стационарных магнитных полях обычно описываются либо на языке скалярного потенциала P , определенного таким образом, что напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ является его градиентом

$$\mathbf{H} = -\nabla P, \quad (5.1)$$

либо на языке векторного потенциала $\mathbf{A}$, ротор которого дает величину магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.2)$$

Скалярный потенциал легко вычислить лишь в областях, где ротор вектора $\mathbf{H}$ равен нулю, т. е. в областях, где нет токов. В этом случае P подчиняется нелинейному дифференциальному уравнению

$$\text{div}(\mu \nabla P) = 0, \quad (5.3)$$

нелинейность которого обусловлена зависимостью магнитной проницаемости материала μ от магнитного поля. Соответственно векторный потенциал определяется из уравнения

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J}, \quad (5.4)$$

которое можно рассматривать как более общее, поскольку в области определения решения могут находиться источники тока с плотностью $\mathbf{J}$. При этом $\mathbf{J}$ может представлять как плотность токов, задаваемых условием задачи, так и плотность токов, наведенных в данной среде. Удельное магнитное сопротивление материала $\nu = 1/\mu$ здесь зависит от величины поля, следовательно, уравнение (5.4) нелинейно.

Уравнения (5.3) и (5.4) справедливы для общего трехмерного случая. Однако, несмотря на то что трехмерные

задачи и представляют значительный практический интерес, в подавляющем большинстве случаев их стараются свести к двумерным моделям. Это связано не только с более высокой стоимостью вычислительных работ в случае трехмерных задач, но и с тем, что представление исходных геометрических данных и результатов расчета вызывает серьезные трудности. Поэтому, например, электрические машины зачастую анализируют в предположении их бесконечной длины вдоль оси. В таких случаях используется уравнение (5.3) и подразумевается, что операторы дивергенции и градиента являются двумерными.

Если в уравнении (5.4) принять, что векторные величины направлены только вдоль оси z , то оно сводится к двумерному

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J. \quad (5.5)$$

Это уравнение по форме идентично двумерному неоднородному варианту уравнения (2.92). Уравнение (5.5) имеет такой вид, как и уравнение Пуассона для линейной задачи. Отличие состоит лишь в том, что характеристики материала зависят от напряженности поля.

Важно отметить, что магнитная проницаемость большинства обычных материалов может считаться скалярной и монотонно изменяющейся величиной. При увеличении напряженности поля магнитная проницаемость уменьшается, а удельное магнитное сопротивление возрастает. Этот факт имеет большое практическое значение, ибо он гарантирует разрешимость задач и единственность решений при использовании методов, рассматриваемых в данной главе.

Для того чтобы попытаться решить уравнения (5.3) или (5.4) методом конечных элементов, необходимо сначала найти подходящий функционал. Может показаться, что ввиду сходства уравнения (5.5) с соответствующими линейными дифференциальными уравнениями подходящим функционалом для (5.4) должно быть выражение

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{H} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J} u d\Omega, \quad (5.6)$$

точно такое же, как и для линейного случая, но это предположение ошибочно. Тем не менее нетрудно заметить, что подынтегральное выражение в первом слагаемом правой части уравнения (5.6) представляет собой плотность энергии для линейной задачи. Поэтому формулу (5.6) можно записать в виде

$$F(u) = \int_{\Omega} W(u) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J} u d\Omega, \quad (5.7)$$

где через $W(u)$ обозначена плотность энергии, соответствующая пробной функции u . К счастью, понятие плотности энергии распространяется не только на линейные материалы. Следовательно, выражение (5.7) можно считать справедливым также для нелинейных сред при условии, что плотность энергии для магнитных материалов определяется адекватным выражением

$$W = \int \mathbf{H} d\mathbf{B}. \quad (5.8)$$

В этом выражении следует использовать следующие связи функций:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{u}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{H} = v\mathbf{B}. \quad (5.10)$$

Функционал (5.7) соответствует формуле (2.102).

Можно доказать, что поскольку первое слагаемое правой части выражения (5.7) фактически представляет энергию, то условия для существования и единственности математического решения точно те же, что необходимы для существования единственного устойчивого состояния реальной магнитной системы: функции, соответствующие кривым намагничивания всех используемых материалов, должны быть монотонно возрастающими, а их первые производные должны монотонно уменьшаться. Поэтому для задач, поставленных в этой главе, достаточно будет рассмотреть стационарные свойства функционала $F(u)$, представленного в виде (5.7). При этом рассмотрение будет проведено в рамках обсуждавшегося выше двумерного приближения, когда вектор $\mathbf{u}$, направленный вдоль оси z , представлен величиной u .

5.2. Определение экстремума

Дискретизация функционала (5.7) для нелинейных задач проводится теми же методами, которые использовались для линейных задач.

Область определения решения разбиваем обычным образом на множество неперекрывающихся конечных элементов. Сосредоточим пока внимание на одном элементе. Пробную функцию u внутри этого элемента представим интерполяционным приближением

$$u = \sum_i u_i a_i(x, y). \quad (5.11)$$

При подстановке этого выражения в формулу (5.7) функционал $F(u)$ становится обыкновенной функцией некоторого числа переменных, соответствующих конечным элементам. Как и ранее, процесс минимизации сводится к простому диф-

ференцированию

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 0, \quad (5.12)$$

где индекс i пробегает по всем нефиксированным переменным. Дифференцируя выражение (5.7), получаем

$$\int \left(\frac{\partial W}{\partial u_i} - J \alpha_i \right) d\Omega = 0. \quad (5.13)$$

Из формул (5.8) и (5.10) следует, что

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \int_0^B v b \, db, \quad (5.14)$$

где b — переменная интегрирования, соответствующая магнитной индукции. Подобный результат получается и в задаче для скалярного потенциала (5.3). В дальнейшем удобно будет рассматривать удельное магнитное сопротивление как функцию квадрата магнитной индукции. Поэтому целесообразно переписать выражение (5.14) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_i} \int_0^{B^2} v(b^2) \, d(b^2). \quad (5.15)$$

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, из этого выражения получаем

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \frac{1}{2} v(B^2) \frac{\partial}{\partial u_i} B^2. \quad (5.16)$$

Возвращаясь теперь к уравнению (5.13), выражающему требование стационарности, подставим в него выражение (5.16) для производной от энергии. Поскольку формула (5.9) связывает величину индукции B с векторным потенциалом, уравнение (5.13) легко привести к матричной форме

$$Su = J. \quad (5.17)$$

Здесь u является вектором значений узловых потенциалов, J — вектор, составляющие которого определяются выражением

$$J_k = \int J \alpha_k \, d\Omega, \quad (5.18)$$

а S — матрица коэффициентов, причем

$$S_{ij} = \int v \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) d\Omega. \quad (5.19)$$

Разумеется, удельное магнитное сопротивление в этом выражении зависит не только от значений координат, но и от ве-

личины поля. Поэтому составление матрицы коэффициентов элемента в нелинейном случае значительно сложнее, чем в случае линейной задачи. Это связано, в частности, с тем, что свойства материала могут существенно изменяться в пределах одного элемента.

5.3. Решение методом простой итерации

Для решения уравнения (5.17) можно применить любой из обычных методов, пригодных для решения нелинейных уравнений. В общих чертах суть простого метода итераций заключается в следующем. Допустим, что задан ряд значений удельного магнитного сопротивления, и пусть решена соответствующая линейная задача. Рассчитанный таким образом векторный потенциал не будет, конечно, решением нелинейной задачи. Но значение u можно использовать для расчета нового ряда значений удельного магнитного сопротивления, которые в свою очередь могут служить основой для вычисления u в следующем приближении. Вычислительный процесс можно начать, задав везде начальные значения удельного магнитного сопротивления (при нулевом значении поля), и закончить его, когда разница между решениями, полученными в двух последовательных приближениях, станет меньше некоторой заданной величины. Блок-схема соответствующей программы расчета приведена на рис. 5.1, а. Этот простой алгоритм не всегда устойчиво сходится, но его можно значительно улучшить, если подкорректировать значения удельного магнитного сопротивления. Иначе говоря, используемые в $k+1$ -й итерации значения удельного магнитного сопротивления должны браться не из k -й итерации, а определяться по взвешенной комбинации из значений потенциала, полученных в k -й и $k-1$ -й итерациях:

$$v^{(k+1)} = v(pu^{(k)} + (1-p)u^{(k-1)}), \quad (5.20)$$

где верхние индексы обозначают номер итерации, p — фиксированный параметр ($0 < p < 1$). Без данной корректировки итерационный процесс обычно осциллирует в широком диапазоне значений удельного магнитного сопротивления. Такое изменение в программе не требует дополнительного объема памяти, поскольку вместо значений u в $k-1$ -м приближении можно записывать значения в $k+1$ -м приближении. Таким образом, требуемый объем памяти по-прежнему должен соответствовать двум полным векторам.

На каждом шаге итерационного алгоритма необходимо решать систему линейных уравнений типа (5.17). Использование для этой цели классического метода исключения переменных может оказаться расточительным по двум причинам,

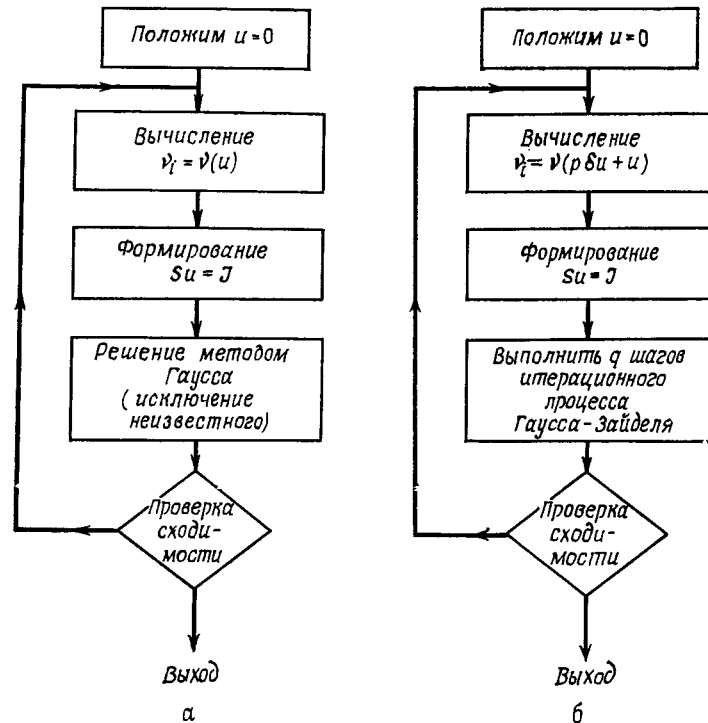


Рис. 5.1. а) Алгоритм простой итерации. б) Блок-схема более надежного и, вероятно, более быстрого варианта того же метода.

Во-первых, на каждом шаге итерационного цикла известно достаточно хорошее приближенное решение, точность которого может достигать нескольких значащих цифр. Однако никакой пользы из этой априорной информации не извлекается. Во-вторых, все последовательные приближенные решения вычисляются с одинаковой заданной точностью, несмотря на то что последние значащие цифры в большинстве случаев вовсе не важны. Поэтому вместо точного решения целесообразнее применить итерационный метод, например метод Гаусса—Зайделя для системы линейных уравнений. В таких методах могут использоваться результаты известного приближенного решения и, кроме того, можно ускорить вычисления за счет уменьшения их точности. Это достигается ограничением числа итераций в процедуре Гаусса—Зайделя, которая выполняется на каждом шаге процесса минимизации функционала. Усовершенствованный вариант итерационного алгоритма представлен на рис. 5.1, б. Изменяя число шагов q в линейной итерации между последовательными вычис-

лениями удельного магнитного сопротивления и используя разные итерационные методы решения системы линейных уравнений, можно построить многочисленные варианты этого алгоритма. Как правило, применение методов данного класса позволяет экономно использовать машинную память, поскольку никогда не требуется формировать всю матрицу S . Необходимо лишь вычислить произведение Su для данного u , а это можно выполнить поэлементным накоплением произведений. Поскольку матрица каждого элемента должна рассчитываться на каждом шаге, то операции по восстановлению S по-прежнему необходимо выполнять на каждом шаге основного алгоритма. Для сложных элементов эта операция весьма трудоемкая. Однако в двумерных плоских задачах при использовании треугольных элементов первого порядка объем вычислений сравнительно невелик.

Рассмотрим треугольный элемент, лежащий в плоскости (x, y) , и допустим, что все токи и векторные потенциалы направлены только по оси z . Используем треугольные элементы первого порядка. Поскольку потенциал A внутри каждого элемента меняется линейно, значение B внутри каждого элемента должно быть постоянной величиной. Следовательно, удельное магнитное сопротивление также должно быть постоянным внутри каждого из элементов. Поэтому выражение (5.19) совпадает с соответствующим выражением для линейной задачи и его очень легко вычислить. Единственная дополнительная операция, которую при этом необходимо выполнять, состоит в определении удельного магнитного сопротивления для каждого треугольника.

Трехмерные асимметричные задачи для магнетиков с насыщением решаются практически таким же образом, как и соответствующие задачи в случае линейных материалов. Однако необходимо еще раз подчеркнуть, что в цилиндрической системе координат векторный и скалярный операторы Лапласа фактически являются различными операторами. Вследствие этого функционалы в задачах для векторного и скалярного потенциалов не одинаковы. Различия между ними носят такой же характер, как и в линейных задачах, и поэтому здесь рассматриваться подробно не будут.

5.4. Расчет подъемного магнита

В качестве примера решения нелинейной задачи рассмотрим расчет простого подъемного магнита, показанного на рис. 5.2, а. Будем считать, что размеры магнита в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, достаточно велики, так что задачу можно считать двумерной. В действительности же рассматриваемая система не только трехмерна,

но и не ограничена в пространстве, что еще более усложняет анализ. Однако наибольший интерес обычно представляет распределение поля вблизи полюсов магнита. Поэтому можно считать вполне приемлемым допущение, что область определения решения ограничена на некотором достаточно большом расстоянии, а сама задача двумерная.

В таком приближении подъемный магнит (рис. 5.2, а) заключен внутри замкнутой прямоугольной поверхности (экра-

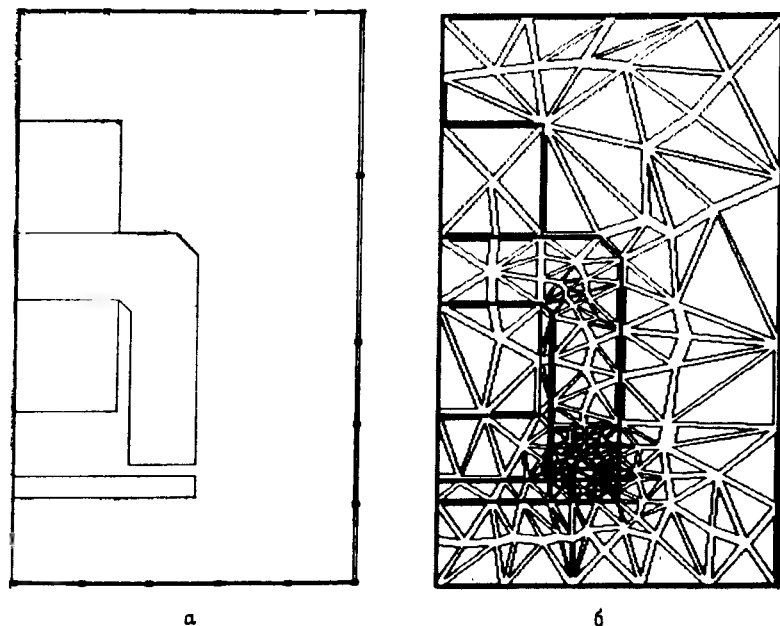


Рис. 5.2. а) Схематический чертеж подъемного электромагнита. б) Сетка конечных элементов, используемая при расчете электромагнита. (Фотографии сделаны с экрана дисплея ЭВМ.)

на), магнитный векторный потенциал которой принят равным нулю. Благодаря симметрии магнита относительно плоскости, проходящей через левый край рис. 5.2, а, достаточно рассмотреть лишь половину области определения решения.

Как и в различных линейных задачах, изученных в гл. 1, область определения решения представляется сначала в виде ансамбля конечных элементов. При выборе размеров и формы элементов следует принимать во внимание ожидаемое распределение плотности энергии в пределах рассматриваемой области. Там, где плотность энергии велика, и там, где она резко изменяется, размеры элементов должны быть минимальными. Однако из-за нелинейности свойств материала

плотность энергии не достигает столь высоких значений, как в случае линейных материалов, так как с возрастанием индукции магнитная проницаемость сплавов железа уменьшается. Поэтому в нелинейном случае допустимо несколько более равномерное разбиение области задачи на конечные элементы. На рис. 5.2, б показано, как разбита на элементы область определения решения, приведенная на рис. 5.2, а.

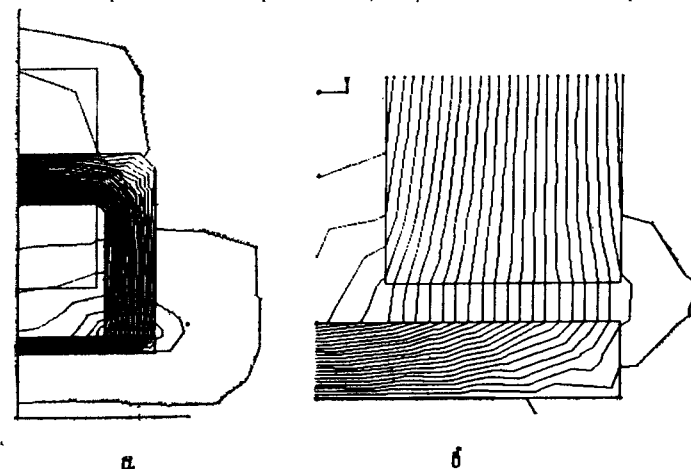


Рис. 5.3. а) Распределение магнитного потока в подъемном электромагните при плотности тока в обмотках, равной 100 А/см². б) Увеличенное изображение зазора в электромагните.

Вблизи полюсов магнита область разделена на множество мелких элементов, часть которых неразличима на рисунке. Вся область разбита на 275 элементов.

Рассчитанный магнитный поток представлен на рис. 5.3, а. Распределение магнитного потока в стали вблизи воздушного зазора и, в частности, в углах сердечника магнита довольно равномерное, что указывает на некоторое, но не очень сильное, насыщение сердечника. Железная пластина, подымаемая магнитом, насыщается значительно сильнее, так как она тоньше сердечника подъемного магнита. Подсчет силовых линий показывает, что величина магнитного потока рассеяния, который проходит мимо пластины, составляет около 20 %. Эта цифра интересна для разработчиков, ибо является одним из важных показателей эффективности устройства.

Несмотря на то что разработчики часто интересуются распределением магнитного потока во всей области определения решения (чтобы получить представление о наиболее общих характеристиках решения), обычно большее значение придается воздушным зазорам. Поэтому на рис. 5.3, б в увели-

ченном масштабе показана область зазора, что позволяет более тщательно изучить распределение поля как вблизи полюса магнита, так и в поднимавшей пластине.

5.5. Итерационный процесс Ньютона

Описанный ранее метод простой итерации обладает довольно медленной сходимостью и требует больших затрат машинного времени. К тому же не известно ни одного метода для оценки требуемой степени корректировки удельного магнитного сопротивления, который гарантировал бы устойчивость без чрезмерного замедления вычислительного процесса. Поэтому предпочтительнее рассмотреть итерационный процесс Ньютона, который является безусловно устойчивым. Сходимость метода Ньютона значительно более быстрая, чем метода простой итерации. Интересно, что метод Ньютона почти не требует дополнительного объема машинной памяти. Теоретически скорость сходимости метода Ньютона в окрестности решения квадратична, т. е. число значащих цифр в каждом последующем приближении примерно вдвое должно превышать число значащих цифр в предыдущем приближении. Таким образом, если в первой итерации приближенное решение верно с точностью до одной значащей двоичной цифры, то вторая итерация обеспечит две верные двоичные цифры, третья — четыре, следующая — восемь и т. д. Итак, пять-шесть последовательных квадратично сходящихся итераций должны обеспечить максимальную точность, достижимую на обычной 32-разрядной ЭВМ. Истинно квадратичная сходимость в действительности обеспечивается только вблизи самого решения. Тем не менее семи-восью итераций по методу Ньютона обычно достаточно для получения точности, превосходящей реальные потребности.

Итерационный процесс Ньютона можно пояснить следующим образом. Представим вновь функционал (5.7) в дискретном виде, используя подстановку выражения (5.11). Допустим, что $\mathbf{A}$ — искомое истинное решение, а

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} - \delta \mathbf{u} \quad (5.21)$$

представляет неточное, но достаточно близкое приближение к $\mathbf{A}$. Разложим каждую составляющую градиента величины $F(\mathbf{u})$ в ряд Тейлора вблизи $\mathbf{u}$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{\partial F}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{u}} + \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_{\mathbf{u}} \delta u_j + \dots \quad (5.22)$$

Но в соответствии с уравнением (5.12) при $\mathbf{u} = \mathbf{A}$ все производные от F должны обращаться в нуль. Отбросив все члены

ряда Тейлора со степенью выше второй, из разложения (5.22) получим выражение для отклонения пробной функции от $\mathbf{A}$

$$\delta \mathbf{u} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{V}, \quad (5.23)$$

где $\mathbf{P}$ — матрица Якоби итерационного процесса Ньютона (матрица Гессе от F)

$$P_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}, \quad (5.24)$$

а вектор $\mathbf{V}$ равен

$$V_j = \frac{\partial F}{\partial u_j}. \quad (5.25)$$

Построение итерационного процесса начинается с выбора некоторого начального набора значений функции $\mathbf{u}$ и вычисления разности между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{A}$ в соответствии с уравнением (5.23). Эту разность, которую обычно называют отклонением, прибавляют затем к первоначально выбранным значениям потенциалов. Отклонение, вычисленное с помощью уравнения (5.23), является приближенным, так как производные третьего и более высоких порядков в ряде Тейлора были отброшены. Отклонение будет рассчитано точно в том случае, когда зависимость $F(\mathbf{u})$ квадратична, так что производные третьего и более высоких порядков обращаются в нуль. В действительности такой характер зависимости $F(\mathbf{u})$ соответствует линейным задачам, когда итерационный процесс сходится за один шаг. В нелинейных задачах вычисленное отклонение просто прибавляется к $\mathbf{u}$ для формирования уточненного значения и затем вся процедура повторяется. Таким образом, итерационная формула

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} - [\mathbf{P}^{(k)}]^{-1} \mathbf{V}^{(k)} \quad (5.26)$$

приводит к последовательности итераций Ньютона, обеспечивая сходимость к $\mathbf{A}$.

Для успешного осуществления процесса Ньютона необходимо вычислять производные (5.24) и (5.25). Формальное дифференцирование функции $F(\mathbf{u})$ дает

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} = \int \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} d\Omega. \quad (5.27)$$

Дифференцируя соотношение (5.16), приведем подынтегральное выражение к виду

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 (B)^2}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial (B^2)} \frac{\partial (B^2)}{\partial u_i} \frac{\partial (B^2)}{\partial u_j}. \quad (5.28)$$

В соответствии с выражениями (5.9) и (5.11)

$$B^2 = \sum_m \sum_n (\nabla \mathbf{a}_m) (\nabla \mathbf{a}_n) u_m u_n. \quad (5.29)$$

Таким образом, производные в формуле (5.28) могут быть выражены в явном виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} = v(\nabla \alpha_i)(\nabla \alpha_j) + 2 \frac{\partial v}{\partial (B^2)} \sum_m \sum_n \{(\nabla \alpha_m)(\nabla \alpha_i)\} \{(\nabla \alpha_n)(\nabla \alpha_j)\} u_m u_n. \quad (5.30)$$

Интересно отметить, что первое слагаемое в правой части этого выражения в точности соответствует тому, которое должно бы иметь место для линейной задачи. Второе, более сложное слагаемое появляется только в нелинейном случае. Поэтому для формирования матрицы коэффициентов $\mathbf{P}$ в нелинейной задаче потребуется несколько больший объем вычислений, чем требовался бы для вычисления $\mathbf{P}$ в аналогичной линейной задаче. Структура матрицы, однако, совершенно одинакова в обоих случаях. Таким образом, при решении нелинейной задачи объем вычислений несколько больше, но требования к объему памяти сохраняются неизменными.

5.6. Треугольные элементы Ньютона первого порядка

Треугольные элементы первого порядка широко используются для расчета электрических машин в приближении бесконечной их длины вдоль оси вращения. Применять такие элементы удобно благодаря их геометрической гибкости, позволяющей легко моделировать сложную форму поперечного сечения электрических машин, и относительной простоте в вычислениях.

Для построения треугольных элементов первого порядка перепишем выражение (5.24) для матрицы Якоби в развернутом виде

$$P_{ij} = \int v(\nabla \alpha_i)(\nabla \alpha_j) d\Omega + 2 \int \frac{\partial v}{\partial (B^2)} \sum_m \sum_n \{(\nabla \alpha_m)(\nabla \alpha_i)\} \{(\nabla \alpha_n)(\nabla \alpha_j)\} u_m u_n d\Omega. \quad (5.31)$$

На треугольном элементе первого порядка магнитная индукция и, следовательно, удельное магнитное сопротивление постоянны везде. Поэтому первый интеграл в правой части выражения (5.31) есть не что иное, как матрица $\mathbf{S}$ (5.19). Далее, поскольку интерполяционные функции для элементов первого порядка линейны, их градиенты должны быть постоянными величинами. Отсюда

$$P_{ij} = S_{ij} + 2 \frac{\partial v}{\partial (B^2)} \Delta \sum_m \sum_n \{(\nabla \alpha_m)(\nabla \alpha_i)\} \{(\nabla \alpha_n)(\nabla \alpha_j)\} u_m u_n, \quad (5.32)$$

где Δ — площадь элемента. Чтобы упростить запись, обозначим через $\mathbf{S}'$ матрицу $\mathbf{S}$, получаемую при удельном магнитном сопротивлении, равном единице, так что

$$S_{ij} = v S'_{ij}, \quad (5.33)$$

а также введем вспомогательный вектор $\mathbf{E}$:

$$E_k = \sum_m S'_{km} u_m. \quad (5.34)$$

Тогда выражение (5.32) принимает вид

$$P_{ij} = v S'_{ij} + \frac{2}{\Delta} \frac{\partial v}{\partial (B^2)} E_i E_j. \quad (5.35)$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части является просто произведением компонент вспомогательного вектора $\mathbf{E}$, следовательно, затраты на его вычисление невелики. Легко добавить и остальные члены в уравнениях, которые описывают итерационный процесс Ньютона с треугольными элементами первого порядка (учитывая, что они были достаточно подробно рассмотрены выше при изложении метода простой итерации). Вектор (5.25) можно записать в виде

$$V_i = \int \frac{\partial W}{\partial u_i} \Big|_u d\Omega - J_i, \quad (5.36)$$

где $\mathbf{J}$ — вектор, определяемый формулой (5.18). Используя в формуле (5.16) выражения (5.33) и (5.34), получаем

$$\int \frac{\partial W}{\partial u_i} d\Omega = v \sum_m S'_{im} u_m = v E_i. \quad (5.37)$$

Соответствующая схема итерационной процедуры показана на рис. 5.4.

Подсчет количества операций показывает, что для каждого формирования матрицы Якоби (5.35) и вектора (5.36) для одного элемента необходимо выполнить всего 28 операций, включающих операции умножения и другие операции, связанные с вычислением удельного магнитного сопротивления и его производной. Это требует небольших затрат машинного времени. Более того, с увеличением числа элементов общее время расчета увеличивается лишь пропорционально числу элементов. С другой стороны, машинное время, необходимое для решения матричных уравнений, даже при наиболее эффективных алгоритмах возрастает быстрее, чем по линейному закону при увеличении количества узлов. В результате время на формирование матрицы эквивалентно времени расчета относительно небольшого числа элементов (не

более 50), тогда как в реальных практических задачах, где используются многие сотни элементов, на формирование матрицы уходит только 5 ... 10 % общего времени счета. Поэтому общее время счета сильно зависит от метода решения уравнения (5.23) для определения поправки Ньютона. По

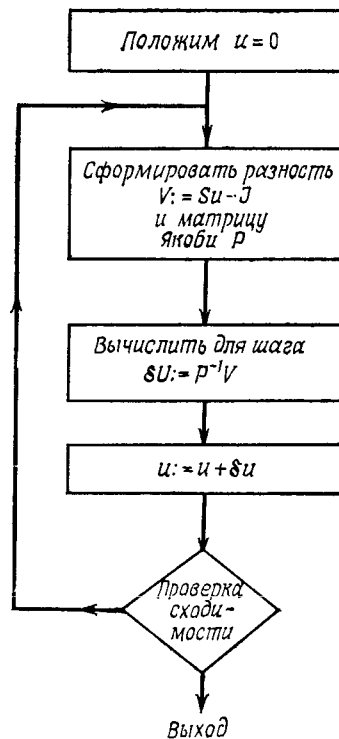


Рис. 5.4. Алгоритм метода Ньютона, обеспечивающий сходимость при расчетах магнитных полей для случая монотонных характеристик намагничивания.

влечет за собой возрастание машинного времени на величину, эквивалентную многим десяткам операций умножения и сложения. Выгоднее использовать кубические сплайны с равномерно расположенными узлами, либо кубические интерполяционные полиномы Эрмита. Для вычисления указанных функций необходимо выполнить всего по три операции умножения, и, кроме того, обе эти функции монотонны и непрерывны. Преимущество монотонной функции состоит в том, что она обеспечивает равномерную сходимость ньютоновского процесса и позволяет избежать сбоев, которые могут возник-

приведенным выше приближенным оценкам можно заключить, что время расчета удельных магнитных сопротивлений по заданным значениям потенциалов имеет важное значение. Очевидно, что данные, характеризующие свойства материалов, должны быть упорядочены таким образом, чтобы быстро получать значения удельного магнитного сопротивления по заданному значению индукции. Классические графики зависимостей B от H для этой цели не очень удобны, в связи с чем обычно используются графики, непосредственно связывающие удельное магнитное сопротивление с квадратом индукции магнитного поля. Для экономии времени лучше не моделировать графики удельного магнитного сопротивления трансцендентными функциями, так как это обычно существенно увеличивает время расчета. Например, применение экспоненциальной функции

кать при резком изменении значения первой производной удельного магнитного сопротивления и, следовательно, значения матрицы P .

5.7. Анализ электрической машины постоянного тока

Рассмотрим пример, поясняющий методы и масштабы практических расчетов, используемых в настоящее время. На рис. 5.5 приведена модель из конечных элементов четырехполюсной электрической машины постоянного тока. Как видно, эта модель не очень сложна. Лишь несколько участков машины моделируется большим числом конечных элементов, чем требуется для правильного представления геометрической формы. Модель воспроизводит только четверть сечения четырехполюсной машины. Остальная часть сечения имеет аналогичные условия возбуждения и форму, поэтому и распределение магнитного поля в ней будет точно таким же. Используемая здесь модель состоит из 258 элементов и включает 143 узловые точки. Можно показать теоретически, что при использовании треугольных элементов первого порядка их число не может превышать более чем вдвое числа узлов. На практике величина указанного соотношения обычно находится в окрестности значения 1,8.

На рис. 5.6 показано решение, полученное для этой модели при номинальном значении тока возбуждения, но в отсутствие других токов в обмотках. При расчете использовались довольно простые граничные условия. Было принято, что внешней поверхности корпуса машины соответствует магнитная силовая линия, и на этой поверхности $A = 0$. Поскольку эта же силовая линия проходит через центр машины, то можно считать, что и на оси машины $A = 0$. Если машина не нагружена, ток ротора и ток между полюсами равны нулю и возбуждение обеспечивается только за счет тока обмоток статора. В этом случае осевая линия полюсного наконечника и осевая линия промежутка между наконечниками являются линиями симметрии. Магнитная силовая линия должна проходить по средней линии полюсного наконечника, а осевая линия промежутка между наконечниками должна быть ортогональна ко всем магнитным силовым линиям. Если, однако, ротор выполнен зубчатым, как показано на рис. 5.5, то четкой прямой линии симметрии уже не будет. Магнитные силовые линии будут пересекать ось симметрии полюсных наконечников некоторым нерегулярным образом. Тем не менее ясно, что потенциал должен иметь одни и те же значения (не считая перемены знака) в соответствующих точках на оси симметрии полюсных наконечников и на оси симметрии межполюсных промежутков. Другими словами, если на осях

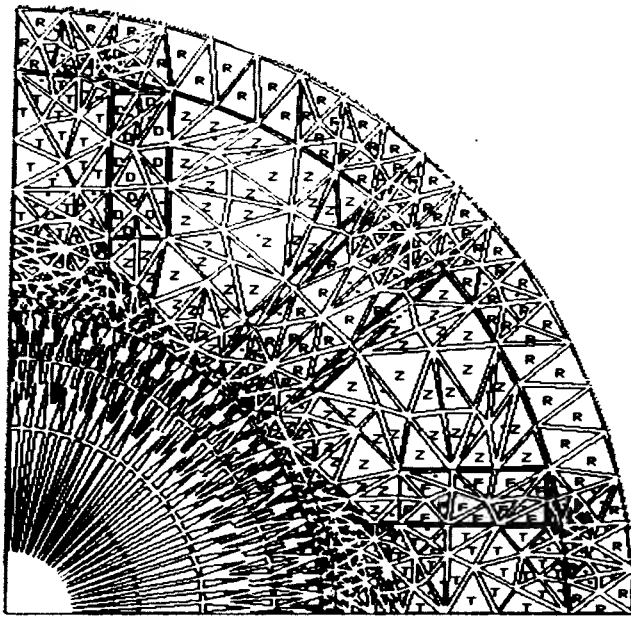


Рис. 5.5. Моделирование электрической машины постоянного тока средних размеров с помощью конечных элементов. Для моделирования половины полюсного наконечника используется 258 элементов.

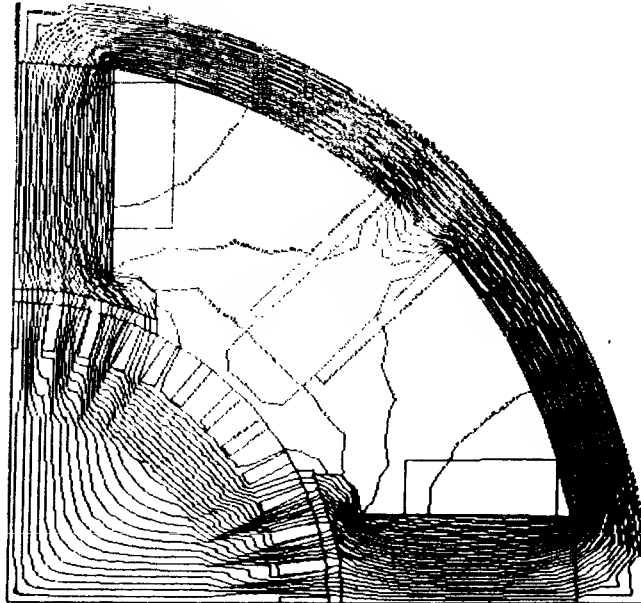


Рис. 5.6. Распределение магнитного потока в четырехполюсной электрической машине, показанной на рис. 5.5, в режиме холостого хода. Как и следовало ожидать, линии магнитного потока симметричны относительно осей симметрии как полюсных наконечников, так и промежутков между ними.

симметрии смежных полюсных наконечников (например, на горизонтальной и вертикальной оси рис. 5.5) взять некоторые геометрически соответствующие узловые точки i и j , то из двух значений потенциала только одно может определяться независимо, поскольку

$$A_i = -A_j. \quad (5.38)$$

Это ограничение по существу сходно с ограничениями, на которые наталкиваются при объединении элементов, и оно фактически связано с ограничением при объединении элементов. Новым является здесь только то, что объединяемые элементы геометрически не примыкают друг к другу, а в матрице появляется отрицательный знак. В этом случае задача становится несимметричной и рассматривать только половину области между полюсными наконечниками уже нельзя. Для получения решения необходимо решать задачу для всей области между наконечниками. Для представленной на рис. 5.5 модели существует 24 уравнения ограничений, вытекающих из граничных условий, т. е. матрица ограничений C имеет 774 строки и 119 столбцов. Таким образом, магнитное поле на каждом шаге итерационного процесса вычисляется решением системы из 119 уравнений.

Магнитный поток Φ , сцепленный с любым данным контуром L (например, с проводником в некоторой обмотке), можно вычислить по формуле

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (5.39)$$

Поскольку краевые эффекты здесь не учитываются, то вклад в вычисляемый интеграл вносят только продольно ориентированные участки контура, и потокоцепление на единицу длины можно вычислить, суммируя все векторные потенциалы по боковым сторонам обмотки. При этом следует помнить, что значения потенциала надо умножить на (-1) там, где направление намотки провода совпадает с направлением оси z , и на $(+1)$ там, где направление намотки и ось направлены противоположно. Таким образом,

$$\Phi = \sum_{i=1}^N w_i [A_i], \quad (5.40)$$

где коэффициенты w_i принимают значения ± 1 в соответствии с направлением намотки провода, а N — число витков обмотки. Индекс i принимает значения, соответствующие всем конечным элементам, относящимся к обмотке, для которой определяется потокоцепление. Величина $[A_i]$ является усредненным векторным потенциалом в i -м элементе. Если принять, что обмотка выполнена из провода диаметром, много

меньшим размера элемента, то витки обмотки займут все возможное место внутри элемента, в связи с чем следует использовать усреднение. При необходимости данным методом можно без повторных вычислений распределения поля определить и форму напряжения, генерируемого в обмотке. Для этого достаточно пересчитать значения потокосцепления (5.40) для ряда последовательных положений ротора, либо, что то же самое, пересчитать значения суммы (5.40) с измененными значениями всех коэффициентов, соответствующими повороту ротора на величину одного паза.

Несложная модель из конечных элементов, подобная представленной на рис. 5.5, обычно достаточна для вычисления тех характеристик машины, которые определяются суммарными усредненными значениями или взвешенными усредненными локальными значениями потенциала. К ним относятся потокосцепление, генерируемое напряжение, полная энергия и все выходные параметры машины. Обычно модели этого уровня сложности могут обеспечить расчет выходных напряжений с погрешностью не хуже нескольких процентов. Такая точность не должна удивлять, поскольку простой классический метод магнитных цепей дает значения генерируемых напряжений, расходящиеся с экспериментом на 5...6%, а ведь он может рассматриваться как очень грубый вариант метода конечных элементов! Для определения выходных параметров машины моделирование с помощью треугольных элементов первого порядка вполне приемлемо, если только используемые элементы точно воспроизводят форму машины. При этом слишком густая сетка в пределах всей машины обычно не нужна. Естественно, если представляют интерес детали распределения потока в каком-либо месте, необходимо применять в том месте более мелкие сетки. Например, если важно знать распределение индукции на конце полюсного наконечника, необходимо исследовать значительно более мелкое разбиение, как для исследуемого, так, вероятно, и для соседних с ним наконечников.

При работе машины под нагрузкой распределение магнитного потока в ней уже не будет симметричным относительно оси симметрии полюсных наконечников. Это видно на рис. 5.7, где представлено рассчитанное распределение магнитного потока в нагруженной машине. В этом случае необходимо проводить расчет для всего участка, соответствующего области между полюсными наконечниками. Кроме того, и граничные условия становятся более сложными, чем в случае ненагруженной машины. По-прежнему справедливо утверждение, что по ободу машины проходит линия магнитного потока $A = 0$ и эта же линия магнитного потока должна проходить через ось машины. Однако если в ненагруженном

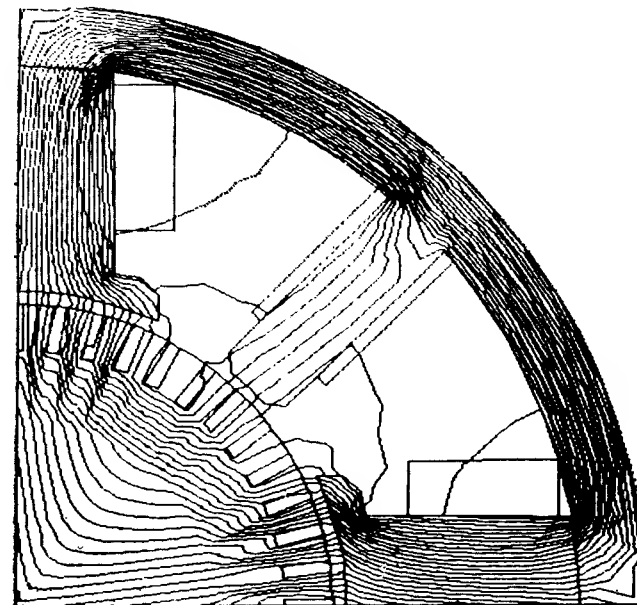


Рис. 5.7. Распределение магнитного потока в четырехполюсной электрической машине, показанной на рис. 5.5, при работе под нагрузкой. Распределение линий потока подчиняется требуемой периодичности на осях полюсных наконечников и на осях промежутков между ними, однако эти оси в данном случае не являются линиями симметрии.

случае из соображений симметрии требовалось, чтобы эта линия шла вдоль оси симметрии полюсных наконечников в радиальном направлении, то в нагруженной машине, как видно из рис. 5.7, особое положение этой линии не может быть каким-либо образом определено. При этом можно лишь утверждать, что все величины для машины должны быть периодическими. Следовательно, все векторные потенциалы вдоль радиальной линии машины должны иметь точно такие же по модулю и противоположные по знаку значения вдоль другой радиальной линии, сдвинутой на половину шага между полюсными наконечниками машины. Например, векторные потенциалы вдоль вертикальной оси симметрии полюсных наконечников на рис. 5.7 должны иметь значения, равные по модулю и противоположные по знаку величинам векторных потенциалов на горизонтальной оси. Это ограничение поддается точно такой же трактовке, как и все обычные граничные условия. Для простоты рассмотрим сетку, показанную на рис. 5.8, а, где потребуем, чтобы потенциалы в узлах 5 и 6

были равны по модулю и противоположны по знаку потенциалам в узлах 1 и 2. Соответствующий разъединенный набор элементов показан на рис. 5.8, б. Очевидно, что в объединенной задаче будет только четыре независимых значения потенциала. Таким образом, вектор двенадцати несвязанных

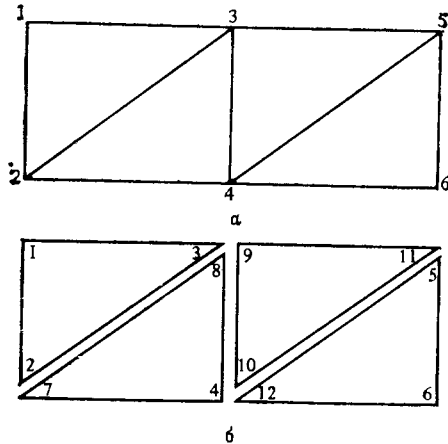


Рис. 5.8. а) Простая треугольная сетка, отвечающая требованию периодичности. б) Та же сетка в разъединенном виде.

потенциалов должен соотноситься со связанными потенциалами матричным преобразованием

$$A_d = CA_c, \quad (5.41)$$

где матрица C есть результат перестановки в матрице

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & & -1 & & & -1 \\ & 1 & & -1 & 1 & \\ & & 1 & & 1 & 1 \\ & & & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Следовательно, требование периодичности означает процесс объединения матриц, который в принципе аналогичен любому другому, но включает вычитание некоторых элементов, так как матрица C в этом случае содержит как положительные, так и отрицательные элементы.

5.8. Анизотропные материалы

Во многих случаях широко используются анизотропные материалы, например текстурированные стали в сердечниках трансформаторов. В таких материалах удельное магнитное сопротивление имеет одно значение в некотором предпочи-

тельном направлении p и другое значение в ортогональном направлении q . Все сказанное выше относительно общего случая (уравнения (5.5) — (5.10)) остается в силе, и стационарный функционал $F(u)$ по-прежнему определяется формулой (5.7) при условии, что удельное магнитное сопротивление считается тензорной величиной. Практические трудности состоят в том, что удельное магнитное сопротивление и, следовательно, плотность энергии W зависят не только от величины вектора магнитной индукции, но и от его направления. Графики зависимостей удельного магнитного сопротивления от величины индукции обычно приводятся только для главных направлений p и q , и лишь изредка для промежуточных направлений. Можно допустить (и это допущение, как правило, будет приводить к отличию от истинных значений на величину, не превышающую нескольких процентов), что линии постоянного удельного магнитного сопротивления представляют собой эллипсы в плоскости (B_p, B_q) . Алгебраически это эквивалентно предположению, что

$$W = W(B_p^2 + r^2 B_q^2), \quad (5.43)$$

где r — отношение полуосей. Пусть требуется построить треугольные элементы. Аргумент в формуле (5.43) можно выразить через координаты, связанные с площадями треугольников:

$$B_p^2 + r^2 B_q^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)^2, \quad (5.44)$$

или в симплексных переменных

$$B_p^2 + r^2 B_q^2 = \sum_i \sum_j \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \frac{\partial A}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p} \frac{\partial \xi_j}{\partial p} + r^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial q} \frac{\partial \xi_j}{\partial q} \right). \quad (5.45)$$

Точно так же как и в случае линейных элементов, производные от симплексных координат по предпочтительным координатам могут быть выражены через значения предпочтительных координат в вершинах треугольников. Это дает

$$B_p^2 + r^2 B_q^2 = \frac{1}{4\Delta^2} \sum_i \sum_j \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \frac{\partial A}{\partial \xi_j} [(q_{i-1} - q_{i+1})(q_{j-1} - q_{j+1}) + r^2 (p_{i+1} - p_{i-1})(p_{j+1} - p_{j-1})]. \quad (5.46)$$

Для формирования матриц элементов необходимо далее использовать выражения (5.12) и (5.13). В соответствии с правилом дифференцирования сложных функций имеем

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = \frac{\partial W}{\partial b^2} \frac{\partial b^2}{\partial u_i}, \quad b^2 = B_p^2 + r^2 B_q^2. \quad (5.47)$$

Здесь u — пробная функция, а экстремум достигается при $u = A$. Применяв аппроксимирующие интерполяционные функции типа (5.11), после их подстановки в (5.47) получим

$$\frac{\partial W}{\partial u_k} = \frac{1}{2\Delta^2} \sum_i u_i \sum_j \frac{\partial W}{\partial B^2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \xi_j} [(q_{i-1} + q_{i+1})(q_{j-1} - q_{j+1}) + r^2(p_{i+1} - p_{i-1})(p_{j+1} - p_{j-1})]. \quad (5.48)$$

Индексы i и j принимают значения от 1 до 3.

Матрица S для метода конечных элементов может быть получена интегрированием уравнения (5.47). Аналитическое интегрирование возможно только в относительно простых случаях, поскольку W в общем случае является некоторой относительно сложной функцией положения. Для реализации метода Ньютона можно опять применить цепное правило дифференцирования сложной функции, чтобы вместо потенциалов дифференцировать квадрат величины магнитной индукции. В результате имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_k \partial u_m} = \frac{\partial^2 W}{d(b^2)^2} \frac{\partial(b^2)}{\partial u_k} \frac{\partial(b^2)}{\partial u_m} + \frac{\partial W}{d(B^2)} \frac{\partial^2(b^2)}{\partial u_k \partial u_m}. \quad (5.49)$$

Здесь производные определены точно так же, как и в формуле (5.47). Необходимо еще раз подчеркнуть, что аналитические дифференцирование и интегрирование сопряжены с большими трудностями, за исключением случая треугольников первого порядка.

Данные методы широко использовались для исследования распределения магнитного потока и магнитной индукции в многофазных многостержневых сердечниках трансформаторов, выполненных из текстурированной стали. В таких случаях предпочтительное направление p соответствует направлению прокатки стального листа. Отношение полюсов может при этом достигать 10, поэтому расчет, выполненный в предположении изотропности материала, не дает хороших результатов.

5.9. Краткий обзор литературы

Нелинейные задачи возникают во многих областях электродинамики сплошных сред, и метод конечных элементов уже применялся в большом числе конкретных случаев. В настоящее время подобная работа проводится в трех основных областях: исследовании ферромагнитных нелинейных материалов, полупроводников и плазмы. Несмотря на значительную разницу в деталях, основная теория по существу подобна той, что применима в других областях математической физики. В книге Одена [1] в общих чертах изложена приклад-

ная математика, на которой основаны все данные методы. Более современный обзор методов, применяемых в задачах электротехники, можно найти в книге Чарли и Сильвестера [2].

Метод конечных элементов впервые был использован в задачах ферромагнетизма. На сегодняшний день эта область остается наиболее исследованной. В литературе хорошо освещена теория метода применительно к этим задачам и опубликовано значительное число примеров его применения. Первыми публикациями, в которых рассматривался этот класс задач, были работы Чарли и Сильвестера [3], определившие методологию для статических полей. Методы, рассмотренные в этой главе, в значительной степени изложены по Сильвестеру, Кабаяну и Брауну [4]. С тех пор достигнуты многочисленные успехи, которые расширили сферу применения метода, например в области анализа изменяющихся во времени процессов, поясненного Ханаллой и Макдональдом [5], и использования криволинейных элементов, описанного Сильвестером и Рафинджадом [6].

Методика, используемая при моделировании полупроводников, возможно, несколько более сложна в деталях. Хороший анализ ранних работ можно найти в статье Барнеса и Ломакса [7]. В этой области, как и в области магнитных материалов, методы сейчас развиты настолько, что возможно создание и широкое использование на коммерческой основе пакетов программ, подобных описанной Бутурле, Коттреллом, Кроссманном и Зальцбургом [8].

Необходимость в решении уравнения Максвелла для плазмы связана с задачами, относящимися к управляемому термоядерному синтезу (удержанию плазмы) и распространению радиоволн; примером может служить статья Трана и Тройона [9].

Глава 6

Трехмерные задачи

6.1. Введение

Некоторые задачи, представляющие практический интерес, обладают симметрией, которая позволяет использовать для их описания две, а не три независимые пространственные координаты. Подобные упрощения возможны для тел вращения с осевым или периферическим возбуждениями поля. Двумерными моделями хорошо аппроксимируются также протяженные цилиндрические объекты с аксиальным возбуждением.

Однако многие реальные устройства такой симметрией не обладают, поэтому для их описания требуются три независимые пространственные координаты и соответствующая полная трехмерная постановка задачи. В настоящей главе рассматриваются методы расчета, связанные с разбиением пространства на конечные элементы, определяемые узловыми точками их вершин. При этом предполагается, что решение задачи с достаточной полнотой представлено значениями параметров, определенными в этих узлах. По-видимому, точность решения задачи таким методом зависит от выбора расстояний между узлами. Поэтому для решения эквивалентных двух- и трехмерных задач потребуется использовать соответственно n^2 и n^3 узлов, где n — это некоторое число, соответствующее требуемой точности решения. При расчете такой дискретной модели на ЭВМ в трехмерном случае потребуется существенно больший объем памяти центрального процессора и возрастут затраты машинного времени, так что задачу, решаемую в двумерном варианте, вообще невозможно будет решить в трехмерном представлении. В задачах, где используются функции векторных полей, объем вычислений может увеличиться даже в большей степени, чем это обусловлено переходом от n^2 к n^3 . Это хорошо видно на примере расчета постоянного магнитного поля с помощью уравнения

$$\operatorname{rot}(\nabla \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad (6.1)$$

для векторного потенциала $\mathbf{A}$, который определяет магнитную индукцию

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.2)$$

Этот пример уже обсуждался в разд. 3.5. В двумерной задаче с трансляционной симметрией заданное распределение тока, направленного вдоль оси z

$$\mathbf{J} = (0, 0, J(x, y)), \quad (6.3)$$

приводит к двумерному векторному потенциалу, который также направлен только вдоль оси z

$$\mathbf{A} = (0, 0, A(x, y)). \quad (6.4)$$

Отметим, что вектор, определяемый уравнением (6.4), тождественно удовлетворяет условию Кулона

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (6.5)$$

Таким образом, получаем скалярное уравнение для скалярной функции, зависящей от двух переменных:

$$\operatorname{div}(\nabla A) = 0. \quad (6.6)$$

Векторная природа данной задачи не проявляется до тех пор, пока не определено $A(x, y)$. Отметим, что вычисление на ЭВМ вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ в соответствии с уравнением (6.2) не является дорогостоящей операцией. При рассмотрении трехмерной задачи оказывается, что в каждом узле необходимо вычислять все три составляющие вектора $\mathbf{A}$, и поэтому число переменных вместо n^2 (в двумерном случае) становится равным $3n^3$. Можно, конечно, применить условие, аналогичное (6.5), что, возможно, позволит уменьшить объем вычислений. Однако векторное описание задачи обеспечивает симметричный набор переменных и более простые граничные условия. Выигрыш от этого, по крайней мере в настоящее время, превосходит всю ту экономию, которую можно получить, используя условие (6.5).

В нестационарных задачах электромагнетизма весь набор переменных представляется вектором $\mathbf{A}$ и скалярным потенциалом V (см. разд. 2.2). Векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции определяются в этом случае уравнениями

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.8)$$

Используя условие Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (6.9)$$

можно фактически свести данную задачу, которая на первый взгляд требует нахождения четырех независимых скалярных функций, к решению уравнений для трех функций. Например, это могут быть A_x, A_y, A_z . При этом потенциал можно выразить через интеграл по времени от $\operatorname{div} \mathbf{A}$.

6.2. Тетраэдральные скалярные элементы

Выше были рассмотрены трудности, возникающие при решении трехмерных задач с векторными функциями. Однако во многих случаях при вычислениях можно пользоваться одной скалярной функцией, и вначале целесообразно рассмотреть именно такие ситуации.

Нестационарные трехмерные скалярные задачи можно классифицировать по способу вычисления потенциала внутри некоторого объема Ω , ограниченного электродами, на которых заданы определенные значения потенциалов. Для неоднородной среды, когда диэлектрическая проницаемость ϵ и плотность заряда ρ зависят от координат, уравнение для потенциала u имеет вид (см. разд. 2.3)

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = -\rho. \quad (6.10)$$

Определение собственных частот резонатора служит примером расширения области применения скалярной задачи на случай гармонических изменений во времени. В данном случае процесс описывается уравнением

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (6.11)$$

где p — переменная составляющая давления на частоте ω , c — скорость звука, $k = \omega/c$ — собственные значения, которые необходимо вычислить для определения резонансных частот (см. разд. 2.8).

Как было отмечено в разд. 2.3, уравнения такого типа являются частными случаями неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\operatorname{div}(p \nabla u) + k^2 u = g, \quad (6.12)$$

подчиненного условиям Дирихле или однородным условиям Неймана. (Характеристику материала p в уравнении (6.12) не следует путать с переменным давлением в уравнении (6.11).) Выше было также показано, что при U , удовлетворяющем условиям Дирихле, но иначе никак не ограниченном, функционал

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [p(\nabla U)^2 - k^2 U^2 + 2gU] d\Omega \quad (6.13)$$

достигает экстремума при совпадении U с решением уравнения (6.12)

$$U = u. \quad (6.14)$$

Вариационный метод решения двумерного неоднородного уравнения Гельмгольца с использованием треугольных конечных элементов рассматривался в гл. 3. В трехмерном случае

используется аналогичная процедура, предложенная Сильвестером [1] и базирующаяся на тетраэдральных элементах. Как будет показано далее, для нахождения массива значений потенциалов в узлах решетки, образованной тетраэдрами, можно составить матричное уравнение. Как и для двумерного случая, такой расчет вначале будет проведен для одного элемента. Значения потенциала при этом будут приближенными из-за того, что внутри тетраэдра u предполагается полиномиальной функцией пространственных переменных. Позже будет показано, каким образом можно распространить результаты, полученные для одного тетраэдра, на ансамбль объединенных элементов.

6.2.1. Трехмерные симплексные координаты

Как и в двумерных задачах, симплексные координаты используются для того, чтобы отделить важнейшие свойства одиночного симплексного элемента (рис. 6.1), обусловленные его тетраэдральной формой, от свойств, характеризующих конкретную конфигурацию, размеры и положение элемента в пространстве. Тетраэдральные координаты определяются следующим образом. Пусть P — точка, расположенная внутри тетраэдра, имеющая декартовы координаты

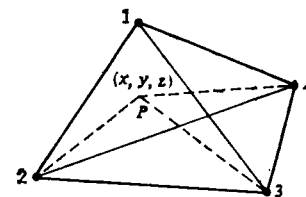


Рис. 6.1. Тетраэдральный симплексный трехмерный конечный элемент.

(x, y, z) , а V — объем тетраэдра. Рассмотрим четыре меньших тетраэдра, каждый из которых образован тремя из четырех исходных вершин (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, и общей точкой P . Обозначим объемы этих тетраэдров через V_1, V_2, V_3, V_4 . Тогда симплексными координатами точки P будет набор величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, где

$$\xi_1 = V_1/V, \quad (6.15)$$

$$\xi_2 = V_2/V \quad (6.16)$$

и т. д. Понятно, что эти четыре координаты не будут линейно независимы, поскольку они удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^4 \xi_i = 1. \quad (6.17)$$

Заметим, что

$$V = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad (6.18)$$

$$V_1 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (6.19)$$

$$V_2 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad (6.20)$$

а для V_3 и V_4 имеют место аналогичные выражения. Следовательно, можно записать соотношение

$$\xi_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{3!V}, \quad (6.21)$$

в котором a_i, b_i, c_i, d_i — миноры, соответствующие определителям (6.19) и (6.20). Таким образом, система координат $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ определена в явной форме через декартовы координаты вершин тетраэдра.

6.2.2. Интерполяционные полиномы

Как и при решении двумерных задач (см. гл. 3), используем интерполяционные полиномы

$$\alpha_{ijkl} = R_i(n_0, \xi_1) R_j(n_0, \xi_2) R_k(n_0, \xi_3) R_l(n_0, \xi_4), \quad (6.22)$$

где $i + j + k + l = n_0$, причем как и в уравнении (3.9)

$$R_m(n_0, \xi) = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (n_0 \xi - k), \quad m > 0; \quad R_0(n_0, \xi) = 1. \quad (6.23)$$

Легко проверить, что $\alpha_{ijkl}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ является интерполяционной функцией и полиномом степени n_0 . Она обращается в нуль в ряде регулярно расположенных точек $\xi_1 = p/n_0$, $\xi_2 = q/n_0$, $\xi_3 = r/n_0$, $\xi_4 = s/n_0$ при целых значениях p, q, r, s , если $p + q + r + s = n_0$, кроме случая $p = i, q = j, r = k, s = l$, когда

$$\alpha_{ijkl}(i/n_0, j/n_0, k/n_0, l/n_0) = 1. \quad (6.24)$$

6.2.3. Матричные соотношения для отдельного тетраэдра

Очевидно, что, используя свойства описанных выше интерполяционных функций, можно аппроксимировать полиномом степени n_0 потенциальную функцию U в пределах тетраэдра

$$U = U_{ijkl}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4). \quad (6.25)$$

В этом выражении i, j, k, l — целые положительные числа или нули, сумма которых равна n_0 , а U_{ijkl} представляет ряд не определенных пока значений функции U в регулярно расположенных точках интерполяции $N = \frac{1}{6}(n_0 + 1)(n_0 + 2) \times (n_0 + 3)$ внутри тетраэдра или на его гранях. Используя доводы, аналогичные приведенным при рассмотрении двумерного случая, можно убедиться в непрерывности U на границах смежных тетраэдров в ансамбле конечных элементов N -го порядка. Слагаемое в правой части уравнения (6.12) можно аппроксимировать с помощью интерполяционных функций выражением

$$g = \sum_{ijkl} g_{ijkl} \alpha_{ijkl}. \quad (6.26)$$

Аппроксимации (6.25) и (6.26) можно подставить в выражение (6.13) для функционала F , соответствующее неоднородному уравнению Гельмгольца. Затем из условия стационарности получаем

$$\frac{\partial F}{\partial U_m} = 0 \quad (6.27)$$

для N значений составного индекса $m \equiv ijkl$. Решение системы уравнений (6.27) приводит к ряду значений $U_m = U_{ijkl}$, которые можно вполне обоснованно считать наилучшим приближением полиномиальной функции (6.25) к точному решению уравнения Гельмгольца (6.12). Теперь покажем, что систему уравнений (6.27) можно записать в виде матричного уравнения

$$SU - k^2 TU + Tg = 0, \quad (6.28)$$

в котором U_m и g_m представлены как векторы U и g . В итоге получаем расширение области применения уравнения (3.21) на трехмерный случай. Уравнения (6.25) и (6.26) можно записать, пользуясь одним индексом

$$U = \sum_{m=1}^N U_m \alpha_m, \quad (6.29)$$

$$g = \sum_{m=1}^N g_m \alpha_m. \quad (6.30)$$

Тогда

$$\nabla U = \sum_{m=1}^N U_m \nabla \alpha_m \quad (6.31)$$

и функционал (6.13) принимает вид

$$F(U) = \frac{1}{2} p \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N U_m U_n \int_{\Omega} (\nabla \alpha_m) (\nabla \alpha_n) d\Omega - \\ - \frac{1}{2} k^2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N U_m U_n \int_{\Omega} \alpha_m \alpha_n d\Omega + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N U_m \int_{\Omega} \alpha_m g_n \alpha_n d\Omega. \quad (6.32)$$

При этом предполагается, что характеристика материала остается постоянной в пределах тетраэдра. В матричной форме уравнение (6.32) имеет вид

$$F(U) = \frac{1}{2} U^T S U - \frac{1}{2} k^2 U^T T U + U^T T g, \quad (6.33)$$

$$S_{mn} = p \int_{\Omega} (\nabla \alpha_m) (\nabla \alpha_n) d\Omega = \\ = p \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial x} \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_m}{\partial y} \frac{\partial \alpha_n}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_m}{\partial z} \frac{\partial \alpha_n}{\partial z} \right) d\Omega, \quad (6.34)$$

$$T_{mn} = \int_{\Omega} \alpha_m \alpha_n d\Omega. \quad (6.35)$$

Теперь видно, что, применив условие стационарности (6.27) к уравнению (6.32), можно получить матричное уравнение (6.28). Остается вычислить матрицы S и T , представляющие собой обобщения матриц, введенных в гл. 3.

Интегрирование в выражениях (6.32) и (6.33) должно выполняться по объему тетраэдра Ω по трем пространственным координатам, например декартовым (x, y, z) , так что $d\Omega = dx dy dz$. Для формального перехода к интегралу в пространстве симплексных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 и $\xi_4 = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$, необходимо заменить $dx dy dz$ на

$$d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 / \frac{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x, y, z)}$$

аналогично тому, как это сделано в двумерном случае, рассмотренном в приложении. Здесь

$$\frac{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} & \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x} & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} & \frac{\partial \xi_3}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (6.36)$$

является якобианом преобразования координат (6.21). Выбор именно ξ_4 в качестве однородной координаты, исключаемой с помощью соотношения (6.17), совершенно произволен. Можно было бы выбрать любую другую комбинацию трех величин из набора $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Можно показать, что величина якобиана (6.36) составляет $1/(3!V)$. Поэтому для вычисления объемных интегралов (6.34) и (6.35) по симплексным координатам ξ_1, ξ_2, ξ_3 и $\xi_4 = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$ следует заменить $d\Omega = dx dy dz$ на $3!V d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$. Таким образом, с помощью выражения (6.21) выражение (6.34) можно записать в виде

$$S_{mn} = 6 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p K_{ij} \int \frac{\partial \alpha_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial \alpha_n}{\partial \xi_j} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (6.37)$$

где

$$K_{ij} = \frac{(b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j)}{36V}. \quad (6.38)$$

Понятно, что, если ξ_4 появляется где-либо в явном виде в формуле (6.37), его следует заменить на $1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$. Введем обозначение

$$Q_{mn}^{ij} = -6 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \alpha_m}{\partial \xi_j} \right) \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \alpha_n}{\partial \xi_j} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (6.39)$$

с помощью которого формулы, полученные в гл. 3 для двумерного случая, можно распространить на случай трехмерных задач. Оказалось, что выражение (6.37) можно представить в виде

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 p K_{ij} Q_{mn}^{ij}, \quad (6.40)$$

где Q_{mn}^{ij} составляют некоторый универсальный числовой массив, который можно рассчитать для любого порядка n_0 полиномиальной аппроксимации, тогда как массив K_{ij} содержит все специфические сведения о форме, размерах и положении тетраэдра. Суммирование в формуле (6.40) включает лишь шесть индексных пар $i, j (i \neq j)$, которые соответствуют шести ребрам тетраэдра, причем диагональные элементы тензора K_{ij} не дают вклада в сумму. Выражение (6.40) можно проверить, используя линейную зависимость между четырьмя симплексными координатами $\sum \xi_i = 1$. При этом сумма каждого из коэффициентов b_i, c_i и d_i , определяющих выражение (6.21), равняется нулю

$$\sum_{i=1}^4 b_i = \sum_{i=1}^4 c_i = \sum_{i=1}^4 d_i = 0. \quad (6.41)$$

Поэтому ясно, что нет необходимости вычислять независимо диагональные элементы тензора K_{ij} — их можно вычислить с помощью недиагональных элементов. При этом

$$\begin{aligned} K_{11} &= -(K_{12} + K_{13} + K_{14}), \\ K_{22} &= -(K_{21} + K_{23} + K_{24}) \end{aligned} \quad (6.42)$$

и т. п. Поскольку тензор K_{ij} симметричен, формулу (6.37) можно преобразовать, заменяя диагональные элементы K_{ii} выражениями (6.42) и элементы вида K_{21} — на K_{12} . Группируя члены суммы, можно убедиться, что внедиагональное суммирование в соотношении (6.40) равносильно суммированию в формуле (6.37).

6.2.4. Вычисление матриц T и Q

Выражения (6.35) и (6.39) совместно с формулами (6.22) и (6.23) для интерполяционных полиномов $\alpha_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ позволяют вычислить коэффициенты T_{mn} и Q_{mn}^{ij} для значений m и n , соответствующих числам ряда $\{1, 2, 3, \dots, N\}$, $N = 1/6(n_0 + 1)(n_0 + 2)(n_0 + 3)$, где n_0 — степень аппроксимирующего полинома, а также для значений i и j , соответствующих числам ряда $\{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$. При выполнении указанных операций приходится вычислять интегралы вида

$$I(i, j, k, l) = \int_{\Omega} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k \xi_4^l d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (6.43)$$

В более явном виде

$$\begin{aligned} I(i, j, k, l) &= \\ &= \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \int_0^{1-\xi_1-\xi_2} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k (1-\xi_1-\xi_2-\xi_3)^l d\xi_3. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Интегрируя по частям это выражение, получаем

$$I(i, j, k, l) = \frac{i! j! k! l! 3!}{(i+j+k+l+3)!}. \quad (6.45)$$

Используя выражение (6.35), можно получить тензор T_{mn} путем перемножения универсальной числовой матрицы на объем тетраэдра $T_{mn} = 3! V t_{mn}$:

$$t_{mn} = \int_{\Omega} \alpha_m \alpha_n d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (6.46)$$

Очевидно, что тензор t_{mn} симметричен, однако имеют место и другие симметрии, позволяющие получить дальнейшую экономию в вычислениях благодаря тому, что на матрицу t совершенно не влияют конкретные значения симплексных ко-

ординат ξ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Наличие таких симметрий покажем на примере тетраэдрального элемента второго порядка, представленного на рис. 6.2.

Вершины тетраэдра можно обозначить с помощью индексов i (или j), принимающих значения 1, 2, 3, 4. Ребра тетраэдра обозначаются одной из шести пар индексов (i, j) . Узловые точки (их число $N = 10$) обозначены составными индексами (p, q, r, s) , $p + q + r + s = 2$. На этом же рисунке приведена произвольно выбранная одноиндексная схема с индексами m (или n). То, что далее используется система обозначений с одним индексом, несущественно, хотя при использовании матриц, представленных в таком виде, надо знать соответствующий «код». Описанная здесь система обозначений с одним индексом была впервые предложена Сильвестером [1] и впоследствии распространена на аппроксимации более высоких порядков. С помощью рис. 6.2 можно видеть, что в случае аппроксимации второго порядка необходимо вычислить лишь элементы t_{11} , t_{22} , t_{12} , t_{15} , t_{16} , t_{23} , t_{29} . Из 100 элементов матрицы все прочие элементы будут определяться теми или иными комбинациями из семи приведенных выше, потому что остающиеся пары индексов всегда могут быть идентифицированы с одной из этих семи при взгляде на тетраэдр с какой-либо другой стороны и соответствующей перестановке в составных индексах. Возвращаясь к матрице Q^{ij} , можно заметить, что для получения массива S_{mn} из выражения (6.40) необходимы коэффициенты Q_{mn}^{ij} для каждой из шести пар индексов i, j ($i > j$), которые представляют ребра тетраэдра. Коэффициенты Q_{mn}^{ij} не зависят от формы и размера тетраэдра, а определяются природой взаимного расположения ребра (i, j) и узловых точек m и n . Выбор обозначений для ребер тетраэдра и узловых точек не должен влиять на результаты вычислений Q_{mn}^{ij} . Следовательно, каждый массив Q^{ij} можно получить путем перестановок одного набора чисел, например Q^{12} . Процедуру получения всех матриц Q^{ij} из Q^{12} лучше всего пояснить на конкретном примере. С этой целью рассмотрим уже использовавшийся тетраэдр с одноиндексной системой обозначений для случая $n_0 = 2$, $N = 10$ (рис. 6.3).

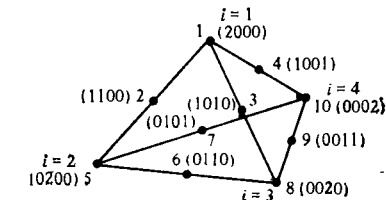


Рис. 6.2. Возможные способы нумерации узлов тетраэдра при аппроксимации полиномом второго порядка.

Предположим, что набор чисел Q_{mn}^{12} известен. Сравнивая фигуры на рис. 6.3, а и б, видим, что выполняется, например,

соотношение

$$Q_{46}^{14} = Q_{29}^{12}. \quad (6.47)$$

Так как числа в матрице Q определяются только относительным положением точек m, n ребра (i, j) , а не конкретными значениями присвоенных им индексов, в рассматриваемом примере одно и то же число Q соответствует ребрам, показанным на рисунке жирной линией, в сочетании с двумя узловыми точками, обведенными кружками. Можно доказать, что

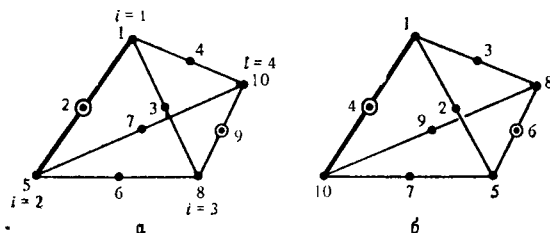


Рис. 6.3. а) Тетраэдр второго порядка. б) Тот же тетраэдр после поворота вокруг оси ξ_1 .

свойство (6.47) является следствием более общего соотношения, полученного с помощью полной перестановки матричных элементов

$$Q^{14} = R_1 Q^{12} R_1^T, \quad (6.48)$$

где R_1 — матрица вращения:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

а R_1^T — транспонированная матрица R_1 . Обозначение R_1 относится к перестановке индексов вершин, соответствующей правому направлению вращения вокруг оси ξ_1 . При этом вершина 1 сохраняет свое обозначение, тогда как вершины 2, 3 и 4 получают новые обозначения 4, 2 и 3 соответственно. Перестановки R_2, R_3 и R_4 меняют обозначения вершин 1, 2, 3, 4 на 3, 2, 4, 1, 4, 1, 3, 2 и на 2, 3, 1, 4 соответственно. С уче-

том геометрических соотношений, вытекающих из рис. 6.3, и равенства $Q^{ij} = Q^{ji}$ можно доказать, что в дополнение к Q^{12} нужны еще пять других матриц:

$$\begin{aligned} Q^{14} &= R_1 Q^{12} R_1^T, \\ Q^{13} &= R_1 Q^{14} R_1^T, \\ Q^{23} &= R_2 Q^{12} R_2^T, \\ Q^{24} &= R_2 Q^{23} R_2^T, \\ Q^{34} &= R_1 Q^{24} R_1^T. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Конечно, вычислять все 100 элементов Q^{12} с самого начала нет необходимости. Благодаря симметрии, которая уже обсу-

Таблица 6.1. Элементы матриц t (наддиагональная часть) и матриц Q^{12} (поддиагональная часть), умноженные на соответствующие значения детерминантов $D(t)$ и $D(Q^{12})$, для $n_0 = 1$ и $n_0 = 2$

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 \\ D(t) &= 20 \\ D(Q^{12}) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} n_0 &= 2 \\ D(t) &= 420 \\ D(Q^{12}) &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} & 6 & -4 & -4 & -4 & 1 & -6 & -6 & 1 & -6 & 1 \\ -12 & & 32 & 16 & 16 & -4 & 16 & 16 & -6 & 8 & -6 \\ 16 & -32 & & 32 & 16 & -6 & 16 & 8 & -4 & 16 & -6 \\ 4 & 0 & -32 & & 32 & -6 & 8 & 16 & -6 & 16 & -4 \\ 4 & 0 & -16 & -32 & & 6 & -4 & -4 & 1 & -6 & 1 \\ -4 & 16 & -4 & -4 & -12 & & 32 & 16 & -4 & 16 & -6 \\ -4 & 0 & 32 & 16 & 4 & -32 & & 32 & -6 & 16 & -4 \\ -4 & 0 & 16 & 32 & 4 & -16 & -32 & & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 32 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

ждалась ранее применительно к матрице T , вычислять отдельно приходится только несколько элементов матрицы Q_{mn}^{12} . Из рис. 6.3, а легко выявить те элементы, которые не надо рассчитывать. Так, например, видно, что

$$Q_{13}^{12} = Q_{14}^{12} = Q_{56}^{12} = Q_{57}^{12}.$$

Матрица t и матрица Q^{12} , соответствующие одноиндексной системе обозначений, показанной на рис. 6.2 и 6.3, протабулированы для $n_0 = 1$ и $n_0 = 2$ и приведены в табл. 6.1.

Элементы матриц t и Q^{12} можно получить, относя представленные в табл. 6.1 числа к соответствующим значениям детерминантов. Несколько более громоздкие матрицы для случая $n_0 = 3$ также были получены Сильвестером [1]. Расчет матриц при $n_0 \geq 2$ сложен и его следует выполнять на ЭВМ. При расчетах пользуются целыми числами, чтобы исключить неопределенности округления.

6.2.5. Глобальные матричные уравнения

Получив S_{mn} и T_{mn} для одиночного тетраэдра, входящего в ансамбль элементов, составляющих трехмерное пространство некоторой задачи, не представляет особой трудности получить общую матрицу, представляющую набор объединенных элементов. Это делается точно так же, как в двумерном случае (см. разд. 1.4 и 3.5). Составляется матрица C , которая выражает ограничения, накладываемые на значения узловых потенциалов U_a , связанные с каждым отдельно пронумерованным тетраэдром. Таким образом, если

$$U_a = C U_c, \quad (6.51)$$

$$g_d = C g_c, \quad (6.52)$$

то с учетом соотношений

$$S = C^T S_d C, \quad (6.53)$$

$$T = C^T T_d C \quad (6.54)$$

должно удовлетворяться уравнение, соответствующее уравнению (6.28), а именно:

$$S U_c - k^2 T U_c + T g_c = 0. \quad (6.55)$$

Напомним, что процедура объединения в значительной степени определена аддитивным характером вкладов отдельных элементов в функционал $F(U)$, определяемый выражением (6.33), в общий функционал для всего пространства задачи. Получив общие матрицы S и T для конкретной задачи, находим далее решения для потенциалов U_i в свободных узлах и собственных значений k (если они существуют). Это делается точно так же, как и в случае двумерной задачи (см. разд. 1.4 и 3.6); если на значения потенциалов в точках на границе Неймана ограничения не накладываются, то, естественно, должно выполняться однородное граничное условие Неймана $n \nabla U = 0$, как если бы рассматриваемые точки были внутренними.

6.2.6. Матричные уравнения для прямоугольной призмы

В данном разделе определяются матрицы S и T , соответствующие восьми узлам, расположенным в вершинах призмы с боковыми гранями с длинами a , b и c . Приведенный здесь пример выбран для того, чтобы пояснить, как представленный ранее анализ используется практически при решении реальных задач. В разд. 6.2.7 показано, что при этом достигается соответствие между результатами расчета прямоугольного акустического резонатора и аналитического расчета, основанного на хорошо изученной физике подобных устройств. Рассматриваемая задача относится к одному из тех редких случаев, когда расчеты можно выполнить без применения ЭВМ. Тем не менее данный пример позволяет выявить много характерных моментов, которые возникают при составлении программ для задач с более сложной геометрией.

Для составления матричных соотношений примем, что призма состоит из пяти соединенных тетраэдров первого порядка. Как показано на рис. 6.4, призма разбита на тетраэдры таким образом, что четыре из пяти тетраэдров конгруэнтны, поскольку любой из них путем вращения и перемещения может быть точно совмещен с любым из остальных трех тетраэдров. Для первых четырех элементов принята система обозначения узлов, согласующаяся с отмеченной конгруэнтностью. Объем каждого из этих элементов равен $abc/6$. Пятый элемент отличается от указанных четырех.

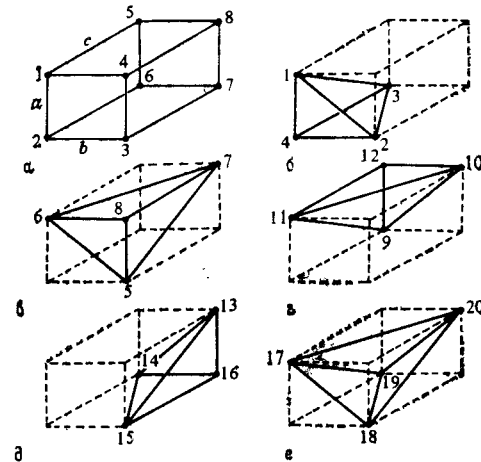


Рис. 6.4. а) Прямоугольная призма с объемом abc . б) — д) Показаны выделенные элементы 1, 2, 3 и 4 соответственно. Они конгруэнтны и объем каждого составляет $1/6 abc$. е) Элемент 5. Его объем равен $1/3 abc$. Нумерация в а) соответствует соединенному набору тетраэдров, а нумерация в б) — е) приведена для разъединенной системы элементов.

декартовы:

$$\xi_1 = \frac{x}{a}, \quad \xi_2 = \frac{y}{b}, \quad \xi_3 = \frac{z}{c}, \quad \xi_4 = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}. \quad (6.60)$$

Поскольку в общем случае (см. формулы (6.21))

$$\xi_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}, \quad (6.61)$$

где V — объем элемента (в данном случае равный $abc/6$), получаем для коэффициентов

$$\begin{aligned} b_1 &= bc, & c_1 &= 0, & d_1 &= 0, \\ b_2 &= 0, & c_2 &= ac, & d_2 &= 0, \\ b_3 &= 0, & c_3 &= 0, & d_3 &= ab, \\ b_4 &= -bc, & c_4 &= -ac, & d_4 &= -ab. \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (6.38) полученные значения коэффициентов и объема элемента, находим для элементов матрицы K_{ij} :

$$K_{ij} = \frac{b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j}{6abc} \quad (6.62)$$

следующие выражения:

$$K_{14} = -\frac{bc}{6a}, \quad K_{24} = -\frac{ac}{6b}, \quad K_{34} = -\frac{ab}{6c}, \\ K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0.$$

С помощью табл. 6.1 можно видеть, что

$$Q^{12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

Для получения остальных пяти матриц Q^{ij} можно было бы записать матрицы вращения R (см. разд. 6.2.4) и соответственно преобразовать Q^{12} . Однако в данном простом случае непосредственно видно, что Q^{ij} определяются соотношениями

$$Q_{ii}^{ij} = Q_{jj}^{ij} = -1, \quad Q_{it}^{ij} = Q_{jt}^{ij} = 1,$$

а все остальные элементы равны нулю. Поэтому матрица S для первого элемента в соответствии с (6.40) равна

$$S_1 = K_{14}Q^{14} + K_{24}Q^{24} + K_{34}Q^{34} \quad (6.64)$$

или в явном виде

$$S_1 = \frac{abc}{6} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & -\frac{1}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & -\frac{1}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & -\frac{1}{c^2} & \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

Это выражение можно представить в форме

$$S_1 = \frac{abc}{6} \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & -X \\ 0 & Y & 0 & -Y \\ 0 & 0 & Z & -Z \\ -X & -Y & -Z & A \end{bmatrix}, \quad (6.66)$$

где $X = 1/a^2$, $Y = 1/b^2$, $Z = 1/c^2$, $A = X + Y + Z$. Матрицы S_2 , S_3 , S_4 идентичны S_1 . Рассмотрим теперь пятый элемент, изображенный отдельно на рис. 6.6, где показаны также оси

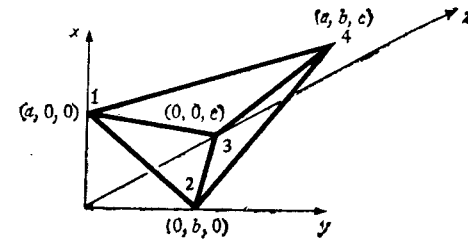


Рис. 6.6. Элемент 5, совмещенный с декартовой системой координат.

декартовых координат. В этом случае симплексная координата ξ_1 , определяемая формулами (6.15), (6.18) и (6.19), равна

$$\xi_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix} / \left(\frac{abc}{3}\right) \quad (6.67)$$

или

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right). \quad (6.68)$$

Аналогично

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right), \quad (6.69)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right), \quad (6.70)$$

$$\xi_4 = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right). \quad (6.71)$$

Используя формулы (6.21), (6.38) и обозначения формулы (6.66) и учитывая, что в данном случае объем элемента $V = abc/3$, получаем для элементов K_{ij} :

$$\begin{aligned} K_{12} &= \frac{abc}{6} \left(-\frac{A}{2} + Z \right), & K_{23} &= \frac{abc}{6} \left(-\frac{A}{2} + X \right), \\ K_{13} &= \frac{abc}{6} \left(-\frac{A}{2} + Y \right), & K_{24} &= \frac{abc}{6} \left(-\frac{A}{2} + Y \right), \\ K_{14} &= \frac{abc}{6} \left(-\frac{A}{2} + X \right), & K_{34} &= \frac{abc}{6} \left(-\frac{A}{2} + Z \right). \end{aligned} \quad (6.72)$$

Имея в виду выражение (6.40) для $\mathbf{S}$ и принимая во внимание, что Q^{ij} получаются с помощью перестановки (2.63), для пятого элемента легко находим

$$\mathbf{S}_5 = \frac{abc}{6} \begin{bmatrix} A/2 & Z - A/2 & Y - A/2 & X - A/2 \\ Z - A/2 & A/2 & X - A/2 & Y - A/2 \\ Y - A/2 & X - A/2 & A/2 & Z - A/2 \\ X - A/2 & Y - A/2 & Z - A/2 & A/2 \end{bmatrix}. \quad (6.73)$$

Таким образом, матрицу $\mathbf{S}_d$ можно записать в виде

$$\mathbf{S}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & & & \\ & \mathbf{S}_1 & & \\ & & \mathbf{S}_1 & \\ & & & \mathbf{S}_1 \\ & & & & \mathbf{S}_5 \end{bmatrix}, \quad (6.74)$$

где $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_5$ — матрицы размерностью 4×4 , определяемые формулами (6.66) и (6.73). Теперь можно записать требуемую матрицу $\mathbf{S}_c = \mathbf{C}^T \mathbf{S}_d \mathbf{C}$. При этом матрица $\mathbf{C}$ по-прежнему определяется выражением (6.56). Соответствующие алгебраические преобразования не особенно громоздки, но требуют при выполнении определенного внимания. Результат вычис-

ления $\mathbf{S}_c$ имеет вид

$$\mathbf{S}_c = \frac{abc}{6} \times \begin{bmatrix} 3A/2 & -X & Z - A/2 & -Y & -Z & Y - A/2 & 0 & X - A/2 \\ -X & A & -Y & 0 & 0 & -Z & 0 & 0 \\ Z - A/2 & -Y & 3A/2 & -X & 0 & X - A/2 & -Z & Y - A/2 \\ -Y & 0 & -X & A & 0 & 0 & 0 & -Z \\ -Z & 0 & 0 & 0 & A & -X & 0 & -Y \\ Y - A/2 & -Z & X - A/2 & 0 & -X & 3A/2 & -Y & Z - A/2 \\ 0 & 0 & -Z & 0 & 0 & -Y & A & -X \\ X - A/2 & 0 & Y - A/2 & -Z & -Y & Z - A/2 & -X & 3A/2 \end{bmatrix}. \quad (6.75)$$

Получив матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ для базового «кирпичика» размером $a \times b \times c$, можно с помощью еще более простых операций соединения складывать из таких «кирпичиков» довольно сложные трехмерные структуры. Таким образом, матричные методы дают возможность решать трехмерные задачи, сводящиеся к неоднородному уравнению Гельмгольца с одной переменной.

6.2.7. Приложения к акустическому резонатору кубической формы

Интересно рассмотреть элементарный результат, который можно получить для кубического акустического резонатора, считая его всего одним подобным «кирпичиком». Как было показано в гл. 2, такая задача описывается дифференциальным уравнением в частных производных вида (см. уравнение (2.157))

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (6.76)$$

где избыточное давление p , изменяющееся с частотой ω , удовлетворяет граничным условиям Неймана $n \nabla p = 0$ на жестких стенках акустического резонатора. Волновое число k связано с резонансной частотой ω и скоростью звука v соотношением

$$k = \omega/v. \quad (6.77)$$

Нетрудно проверить, что для прямоугольной призмы аналитическое решение с единичной амплитудой имеет вид

$$p = \cos \left(\frac{l\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \cos \left(\frac{n\pi z}{c} \right), \quad (6.78)$$

где l, m, n соответствуют акустическим модам резонатора и принимают значения 0, 1, 2, 3, ... Резонансная частота определяется с помощью формулы (6.67) с учетом того, что

$$k^2 = \pi^2 (l^2/a^2 + m^2/b^2 + n^2/c^2). \quad (6.79)$$

Матричное уравнение, эквивалентное уравнению (6.76), имеет вид

$$SU - k^2TU = 0. \quad (6.80)$$

Если U в этом уравнении является вектором значений в восьми узлах прямоугольной призмы, то матрицы S и T определяются выражениями (6.59) и (6.75). Хотя каждый из восьми узлов лежит на границе области задачи, никаких дополнительных ограничений не возникает, поскольку применяются граничные условия Неймана.

Таким образом, собственные значения k , соответствующие акустическим модам, находятся из условия обращения в нуль детерминанта

$$D = |S - k^2T|. \quad (6.81)$$

Для куба со стороной a находим, что

$$D = \frac{a^3}{6} \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta & \gamma & \gamma & \delta & 0 & \delta \\ \gamma & \beta & \gamma & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \delta & \gamma & \alpha & \gamma & 0 & \delta & \gamma & \delta \\ \gamma & 0 & \gamma & \beta & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \beta & \gamma & 0 & \gamma \\ \delta & \gamma & \delta & 0 & \gamma & \alpha & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \gamma & \beta & \gamma \\ \delta & 0 & \delta & \gamma & \gamma & \delta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}, \quad (6.82)$$

где $\lambda = k^2 a^2 / 20$, $X = Y = Z = 1/a^2$, $A = 3/a^2$, $\alpha = 9/2 - 10\lambda$, $\beta = 3 - 2\lambda$, $\gamma = -(1 + \lambda)$, $\delta = 1/2 - 4\lambda$.

Из формулы (6.82) можно видеть, что условие $D = 0$ приводит к алгебраическому уравнению восьмой степени относительно λ , которое имеет восемь корней, определяющих значения k для первых восьми акустических мод. Обычно для нахождения корней следует использовать расчеты на ЭВМ. Однако в данном случае из-за предельной простоты задачи уравнения можно составить и решить аналитически. Отметим, что в матрице S суммы элементов по строкам (и столбцам) всегда равны нулю, так что суммы столбцов определителя D (6.82) составляют попеременно -27λ и -5λ . Нетрудно при этом получить следующее выражение для детерминанта:

$$D = -\frac{5}{6}\lambda(-11\lambda^2 + 28\lambda - 11)^3(7\lambda - 18)a^3. \quad (6.83)$$

Уравнение ($D = 0$) имеет два несовпадающих корня и пару тройных корней. Из табл. 6.2 видно, что характер поведения

Таблица 6.2. Сравнение точных собственных значений с приближенным матричным восьмимодовым решением

Индексы мод l, m, n	000	001 010 100	011 101 110	111
Точное решение: $ka = \pi(l^2 + m^2 + n^2)^{1/2}$	0	3,14	4,44	5,44
ka из собственных значений матрицы	0	3,12	6,42	7,17

корней соответствует симметрии аналитического решения (6.79). Одно из решений тривиальное — $p = \text{const}$. Затем с приемлемой точностью получается трижды вырожденная основная мода. И далее идентификация мод сохраняется, т. е., как и следовало ожидать, получаются трижды вырожденная мода и одиночная мода. Однако точность определения величины k с ростом индексов уменьшается. Это естественно, так как с помощью столь простой модели, обладающей всего восемью степенями свободы, нельзя определить более восьми мод из бесконечного их множества.

6.3. Трехмерные задачи магнитостатики

Одной из особенно важных для практики трехмерных задач, не допускающих двумерного приближения, является определение магнитного поля катушки с током, расположенной в непосредственной близости от ферромагнитного материала с нелинейными характеристиками (насыщающегося стального магнитопровода).

Такая задача была сформулирована на основе векторного потенциала A в разд. 2.5, и упрощенный двумерный вариант ее был подробно рассмотрен в гл. 5. Однако в трехмерном случае необходимо учитывать три компоненты вектора A . Возникают также трудности, связанные с калибровкой Лоренца, что заставляет искать другой подход к решению задачи. Оказалось, что в данном случае целесообразно использовать скалярный магнитный потенциал.

6.3.1. Уравнение для скалярного потенциала

Вектор магнитной индукции B , обусловленный распределением тока J вблизи нелинейного магнитного материала с магнитной проницаемостью μ , зависящей от величины поля,

описывается следующими фундаментальными уравнениями:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (6.84)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (6.85)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (6.86)$$

Напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ в области, где протекает электрический ток, можно, как и в разд. 4.5, представить в виде двух составляющих, соответствующих полю источника $\mathbf{H}_S$ и наведенной намагниченности $\mathbf{H}_M$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_M. \quad (6.87)$$

Поле источников можно получить непосредственно из уравнения Био—Савара, выполнив интегрирование по области Ω_J , содержащей токи

$$\mathbf{H}_S(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_J} \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega. \quad (6.88)$$

Это поле удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_S = \mathbf{J}, \quad (6.89)$$

так что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_M = 0. \quad (6.90)$$

Поэтому $\mathbf{H}_M$ можно записать в виде градиента скалярного потенциала магнитного поля

$$\mathbf{H}_M = -\nabla P. \quad (6.91)$$

В принципе это позволяет определить P из уравнения

$$\operatorname{div}(\mu \nabla P) + \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}_S) = 0, \quad (6.92)$$

которое вытекает из соотношений (6.85) и (6.87). С учетом соленоидальности $\mathbf{B}$, выраженной уравнением (6.86), в однородной линейной среде уравнение (6.92) приобретает вид

$$\Delta P = 0, \quad (6.93)$$

поскольку всегда $\operatorname{div} \mathbf{H}_S = 0$. Скачок величины μ на границе раздела сред требует применения граничных условий для полей (см. разд. 2.1). Если, однако, используемые материалы обладают большой магнитной проницаемостью, применение скалярного потенциала P может натолкнуться на большие трудности при численном решении задачи (см. статью Симкина и Тробрэджа [2]). Внутри таких материалов наведенное магнитное поле $\mathbf{H}_M = -\nabla P$ и поле источников $\mathbf{H}_S$ в выражении (6.87) близки по величине и противоположны по знаку, так что ошибки определения $\mathbf{H}_M$ многократно возрастают в результирующем поле $\mathbf{H}$. Для иллюстрации рассмотрим простую задачу о ферромагнитном сердечнике с одина-

ковой по всему объему магнитной проницаемостью μ , размещенном внутри длинного соленоида с током I (рис. 6.7). В таком соленоиде при числе витков N на единицу длины и токе I вектор магнитного поля направлен вдоль оси и определяется хорошо известным соотношением

$$\mathbf{H}_S = N I \mathbf{e}_z, \quad (6.94)$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль оси соленоида. Если сердечник заполняет поперечное сечение соленоида, то поле в этой области должно быть аксиальным и решение уравнения (6.93) имеет вид

$$P = Cz, \quad (6.95)$$

и внутри сердечника

$$\mathbf{H}_M = -C \mathbf{e}_z, \quad (6.96)$$

а за пределами сердечника везде внутри соленоида $\mathbf{H}_M = 0$. Требование непрерывности нормальной составляющей $\mathbf{B}$ на торцах сердечника, где имеет место скачок величины μ , позволяет определить постоянную C из равенства

$$\mu_0 \mathbf{H}_S = \mu (\mathbf{H}_S - C \mathbf{e}_z), \quad (6.97)$$

откуда получаем

$$C = N I (1 - \mu_0/\mu). \quad (6.98)$$

Относительная магнитная проницаемость ферромагнитных материалов очень велика, ее значения могут достигать нескольких тысяч. В этом случае вполне вероятно взаимное уничтожение $\mathbf{H}_S$ и $\mathbf{H}_M$ в выражении (6.87)

$$\mathbf{H} = N I \mathbf{e}_z - N I (1 - \mu_0/\mu) \mathbf{e}_z. \quad (6.99)$$

6.3.2. Полный скалярный потенциал

Трудности в численном исследовании, обусловленные приближительным равенством величин, входящих в выражение (6.87), можно обойти, если использовать то обстоятельство, что на практике электрические и магнитные цепи пространственно разнесены, т. е. занимают различные области, которые можно обозначить Ω_J и Ω_k . Предположим, что область Ω_J содержит все электрические токи и в ней нет магнитных материалов, а в Ω_k находятся все магнитные материалы. По-

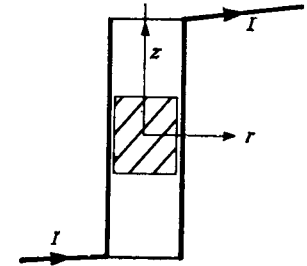


Рис. 6.7. Магнитный сердечник в длинном соленоиде.

скольку в Ω_k нет электрических токов, магнитное поле там можно представить полным скалярным потенциалом Ψ

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi. \quad (6.100)$$

В области Ω_l , содержащей токи, должно выполняться следующее соотношение для скалярного потенциала:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S - \nabla P. \quad (6.101)$$

Но поскольку обычно можно считать, что $\mu = \mu_0$, то P будет определяться уравнением Лапласа (6.93). Из уравнений (6.85) и (6.86) вытекает, что в области Ω_l

$$\operatorname{div}(\mu \nabla\Psi) = 0. \quad (6.102)$$

Уравнения (6.93) и (6.102) должны решаться при наложении определенных условий на границе между Ω_l и Ω_k , а именно: нормальная составляющая $\mathbf{B}$ и тангенциальная составляющая $\mathbf{H}$ на границе между областями должны быть непрерывны. Так, если $\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный к поверхности S_{lk} , разделяющей две области, а $\mathbf{t}$ — единичный вектор, тангенциальный к поверхности, то

$$\mu_0(\mathbf{H}_S - \nabla P) \mathbf{n} = -\mu(\nabla\Psi) \mathbf{n}, \quad (6.103)$$

$$(\mathbf{H}_S - \nabla P) \mathbf{t} = -(\nabla\Psi) \mathbf{t}. \quad (6.104)$$

Видно, что уравнение (6.104) можно проинтегрировать по элементу дуги l , чтобы связать потенциалы в любых двух точках M и Q на поверхности раздела

$$P - \int_M^Q \mathbf{H}_S dl = \Psi, \quad (6.105)$$

где M — точка, в которой P и Ψ предполагаются равными.

6.3.3. Решение уравнений с двумя потенциалами

Характер задачи, рассматриваемой в настоящем разделе, иллюстрируется рис. 6.8. Мы будем основываться на анализе, выполненном в работе Симкина и Троубриджа [3]. Требуется определить магнитное поле в трехмерной системе, содержащей нелинейный магнитный материал (например, сталь), не несущий никакого электрического тока, и область, включающую диэлектрик с линейной характеристикой (обычно это воздух) и проводники с током (например, медные). Для описания магнитного поля в воздушном зазоре и внутри проводников с током, т. е. в области Ω_l , используется потенциал P в соответствии с формулами (6.87) и (6.93). Предполагается, что магнитное поле источников $\mathbf{H}_S$ известно, так как оно вы-

ражается через заданное распределение тока с помощью выражения (6.88). В области с насыщающимся магнитным материалом Ω_k из-за описанных выше сложностей отказываются от представления с помощью потенциала P и пользуются

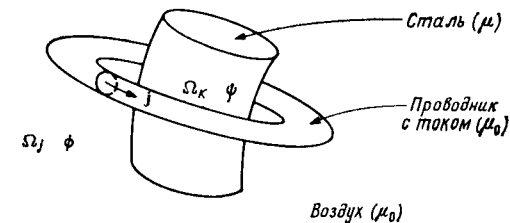


Рис. 6.8. Две потенциальные области: Ω_k — сталь, $\operatorname{div}(\mu \nabla\Psi) = 0$; Ω_l — проводник с током или воздух, $\Delta P = 0$.

полным скалярным потенциалом Ψ . Поэтому поля описываются уравнениями (6.101) и (6.102). На поверхности потенциалы P и Ψ связаны соотношениями (6.103) и (6.105). Полный набор соотношений приведен в табл. 6.3.

Таблица 6.3. Соотношения для потенциалов, описывающие трехмерную задачу магнитостатики

$\mathbf{H}_S$ — вектор магнитного поля источников, P — скалярный потенциал, Ψ — полный скалярный потенциал

Область Ω_l (медь или воздух)	$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S - \nabla P$ $\Delta P = 0$
Область Ω_k (сталь)	$\mathbf{H} = -\nabla\Psi$ $\operatorname{div}(\mu \nabla\Psi) = 0$
Условия на поверхности	$\mu_0(\mathbf{H}_S - \nabla P) \mathbf{n} = -\mu(\nabla\Psi) \mathbf{n}$ $P - \int_M^Q \mathbf{H}_S dl = \Psi$

Пространство задачи разбивается на тетраэдральные элементы так, как это делалось в разд. 6.2. Большинство элементов при этом будет находиться полностью в одной из областей (Ω_l или Ω_k). Лишь некоторые из них расположены так, что на поверхность раздела S_{lk} попадает или одна их вершина, или ребро, или одна боковая грань. Будем считать, что тетраэдральные конечные элементы выбраны таким образом, что каждый элемент, касающийся поверхности раздела,

относится к одной из этих трех категорий. Решением задачи считается нахождение значений потенциалов P или Ψ в каждой узловой точке. Отметим, что в узлах на поверхности S_{jk} должны быть определены значения обоих потенциалов, как P , так и Ψ .

6.3.4. Решение методом Галёркина

В большинстве случаев, рассмотренных в данной книге, на этом этапе находилась функционал, стационарный относительно переменных поля, и составлялись матричные уравнения для конечных элементов. Здесь же усложнение граничных условий на границе раздела между Ω_1 и Ω_2 заставляет прибегнуть к другому мощному методу — методу взвешенных невязок, который иногда используется для построения матричных уравнений конечных элементов (Зенкевич [4]). В этом методе непосредственно используются дифференциальные уравнения в частных производных и краевые условия задачи, и поэтому он применим в случаях, когда соответствующий функционал трудно определить. В тех случаях, когда стационарный функционал существует, метод Галёркина как частный случай общего метода взвешенных невязок (см. разд. 4.2) приводит точно к такому же результату, как и вариационное решение.

Переменная поля, скажем U , аппроксимируется с помощью интерполяционных функций α_m , как и в вариационном методе. В пределах конечного элемента, или в ансамбле конечных элементов, приближенное решение записывается через узловые потенциалы U_m в виде

$$U = \sum_{m=1}^N U_m \alpha_m. \quad (6.106)$$

Задача, как и ранее, состоит в том, чтобы найти такие U_m , при которых выражение (6.106) наилучшим образом соответствовало бы дифференциальным уравнениям и краевым условиям задачи.

Метод взвешенных невязок можно применять к задачам, описываемым общим уравнением (6.12). Однако для задачи с двумя потенциалами в том виде, как она сформулирована в настоящем разделе, достаточно рассмотреть уравнение

$$\operatorname{div}(p \nabla u) = 0, \quad (6.107)$$

представляющее либо (6.93), либо (6.102). Оставляя пока в стороне граничные условия на поверхности раздела (6.103) и (6.105), можно было бы скомпоновать граничные условия из условий Неймана

$$p n \nabla u = q \quad (6.108)$$

на поверхности S_1 , где q — некоторая заданная функция координат, и условия Дирихле

$$u = u_0 \quad (6.109)$$

на поверхности S_2 , где u_0 — также функция координат. При этом предполагается, что пространство задачи представляет собой объем Ω , ограниченный замкнутой поверхностью, включающей в себя S_1 и S_2 . Далее для аппроксимирующего выражения (6.106) выбираются произвольные весовые функции W_n , $\bar{W}_n$ и определяются взвешенные невязки

$$R_n = \int_{\Omega} W_n \operatorname{div}(p \nabla U) d\Omega + \int_{S_1} \bar{W}_n (p n \nabla U - q) dS + \int_{S_2} \bar{W}_n (U - u_0) dS. \quad (6.110)$$

Ясно, что если бы U было точным решением уравнения (6.107), то невязки R_n всегда были бы равны нулю. Но в выражении (6.106) U является приближением, содержащим N неопределенных коэффициентов. Если для соотношения (6.110) выбрать N линейно независимых весовых функций, то можно получить достаточное число уравнений, чтобы, приравняв нулю каждую взвешенную невязку, определить весь набор значений. Тогда U , определяемое формулой (6.106), можно считать наиболее подходящим для конкретного класса выбранных весовых функций.

Выражение (6.110) можно привести к виду, при котором не требуется специально определять вторые производные от U . Это преобразование выполняется с помощью известного в векторном исчислении тождества

$$\operatorname{div}(p W_n \nabla U) = W_n \operatorname{div}(p \nabla U) + p (\nabla W_n) (\nabla U) \quad (6.111)$$

и теоремы Остроградского — Гаусса

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(p W_n \nabla U) d\Omega = \int_S W_n p \nabla U dS, \quad (6.112)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем Ω . Поскольку S состоит из S_1 и S_2 , выражение (6.110) приобретает вид

$$R_n = - \int_{\Omega} p (\nabla W_n) (\nabla U) d\Omega + \int_{S_1} (W_n + \bar{W}_n) p \nabla U dS - \int_{S_1} \bar{W}_n q dS + \int_{S_2} W_n p \nabla U dS + \int_{S_2} \bar{W}_n (U - u_0) dS. \quad (6.113)$$

В большинстве случаев можно принять, что $q = 0$ (однородные условия Неймана), а U ограничено условием $U = u_0$ на

S_2 . Выбор $W_n = -\bar{W}_n$ не влечет потери общности и приводит к относительно простому соотношению

$$R_n = - \int_{\Omega} p (\nabla W_n) (\nabla U) d\Omega + \int_{S_1} W_n p \nabla U dS. \quad (6.114)$$

Это выражение для R_n приравняем нулю, что приведет к следующим матричным уравнениям для каждого элемента, не содержащего узлов на поверхности раздела S_{jk} между Ω_j и Ω_k :

$$S_p P = 0, \quad (6.115)$$

или

$$S_\Psi \Psi = 0, \quad (6.116)$$

где символы P и Ψ обозначают искомые векторы узловых потенциалов. Отметим, что если некий элемент находится внутри области Ω_j или Ω_k и не касается границы раздела между ними, то в качестве поверхности S_2 можно выбрать поверхность между двумя смежными элементами. Характеристика материала p (в данном случае магнитная проницаемость μ) может изменяться скачком от элемента к элементу, однако при этом нормальная составляющая магнитной индукции $p n \nabla u$ должна быть непрерывной. Нормальные векторы к общей поверхности между двумя элементами S_2 будут равны по величине и противоположны по направлению для разных элементов. Поэтому при объединении невязок для двух прилегающих элементов второе слагаемое правой части в соотношении (6.114) обращается в нуль. Таким образом, пренебрегая вторым членом в уравнении (6.114), получим, что учет вклада от поверхностей раздела между элементами эквивалентен требованию непрерывности $p n \nabla u$. Приняв это к сведению, можно далее заметить, что поверхностный интеграл в уравнении (6.114) учитывается лишь в случае, когда на внешней границе выполняется условие Дирихле. Однако на внешних границах S_2 в соответствии с установленными ограничениями U должно равняться u_0 , поэтому нет необходимости вычислять невязку в граничных точках. Следовательно, в практических вычислениях вторым слагаемым в правой части выражения (6.114) можно пренебречь. Ясно, что матрицы S_p и S_Ψ связаны между собой так, как это было показано в разд. 1.5 для ансамбля конечных элементов.

Если теперь выбрать в качестве весовых функций W_n интерполяционные функции α_m , то мы приходим к процедуре Галёркина. Этот метод эквивалентен вариационному подходу, и, следовательно, для элементов, не соприкасающихся с поверхностью раздела, элементы матрицы S определяются вы-

ражением

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 p K_{ij} Q_{mn}^{ij}, \quad (6.117)$$

которое совпадает с (6.40). Отметим, что здесь отсутствуют матрицы T , входящие в уравнение (6.28). Это обусловлено нулевой правой частью в уравнении (6.93) либо (6.102). Если потребуется ввести в указанные уравнения ненулевую правую часть, то это не составит особого труда. Такая необходимость может возникнуть, если материал в области Ω обладает нелинейными характеристиками или же в области Ω_k расположены постоянные магниты [3]. Отметим, что отсутствие здесь слагаемых, обусловленных любыми однородными условиями Неймана, соответствует «естественному» условию в вариационном анализе.

Теперь рассмотрим два конечных элемента Ω_1 и Ω_2 , находящиеся соответственно в областях Ω_j и Ω_k и имеющие общие грани на поверхности раздела S_{12} между Ω_j и Ω_k . Подставив $p = 1$ и $p = \mu/\mu_0\mu_r$ в выражение для P и Ψ соответственно, можно определить невязки

$$R_{1n} = - \int_{\Omega_1} (\nabla W_n) (\nabla P) d\Omega + \int_{S_{12}} W_n \nabla P dS, \quad (6.118)$$

$$R_{kn} = - \int_{\Omega_2} \mu_r (\nabla W_n) (\nabla \Psi) d\Omega + \int_{S_{21}} W_n \nabla \Psi dS, \quad (6.119)$$

где S_{12} и S_{21} представляют по существу одну и ту же поверхность, но с противоположно направленными нормальными n . Поверхность S_{12} (и S_{21}) считается частью поверхности типа S_2 . Поскольку поверхностный интеграл по оставшейся части поверхности S_2 , находящейся внутри области Ω_j (или Ω_k), в любом случае обращается в нуль, он не включается в выражение для R_{1n} (или R_{kn}). Сумму невязок

$$R_{1n} + R_{kn} = - \int_{\Omega_1} (\nabla W_n) (\nabla P) d\Omega - \int_{\Omega_2} \mu_r (\nabla W_n) (\nabla \Psi) d\Omega + \int_{S_{12}} W_n (\nabla P - \mu_r \nabla \Psi) dS \quad (6.120)$$

можно преобразовать, используя условие (6.103) для границы раздела. В результате

$$R_{1n} + R_{kn} = - \int_{\Omega_1} (\nabla W_n) (\nabla P) d\Omega - \int_{\Omega_2} \mu_r (\nabla W_n) (\nabla \Psi) d\Omega + \int_{S_{12}} W_n H_S dS. \quad (6.121)$$

Приравнивая нулю правую часть этого выражения, получим матричное уравнение вида

$$S'_P P + S'_\Psi \Psi = h. \quad (6.122)$$

В этом уравнении матрицы S для элементов, заключенных внутри данной области, имеют такой же вид, как и в уравнениях (6.115) и (6.116). Вектор h получается интегрированием по общей поверхности стыка элементов Ω_1 и Ω_2

$$h_n = \int_{S_{12}} W_n H_S dS. \quad (6.123)$$

Всегда существует некоторая двусмысленность в том, P или Ψ представляют поле на стыке. Этот вопрос решается исключением P или Ψ на основе соотношения (6.115) после того, как произвольно выбрана одна точка, в которой считается, что $P = \Psi$. При этом опять можно использовать метод Галёркина, положив $W_n = \alpha'_n$. Теперь можно связать матрицы S'_P и S'_Ψ этих конечных элементов с матрицами, соответствующими элементам, не имеющим поверхностей на стыке двух областей, как это обычно делается с массивами, полученными на основе стационарных функционалов. Отметим, что если элемент имеет на поверхности S_{12} хотя бы одну вершину или ребро, то интеграл в (6.123) обращается в нуль, а уравнение (6.105) тем не менее остается в силе. Построив глобальные матрицы S_P и S_Ψ , получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных узловых потенциалов P и Ψ . Решив систему уравнений, находим неизвестные потенциалы и через них определяем поля, силы и т. п. Таким образом, оказывается возможным решить трехмерные задачи о проводниках с током, создающих магнитные поля в прилегающих нелинейных магнитных материалах.

Изложенная здесь в общих чертах процедура лежит в основе программы TOSCA, описанной в работе Симкина и Троубриджа [3]. Эта программа обеспечивает решение практически важных нелинейных трехмерных задач магнитостатики, которые до сих пор нельзя было решить численными методами. Для более подробного знакомства с этими достаточно сложными расчетами и полученными практическими результатами необходимо обратиться к упомянутой работе Симкина и Троубриджа [3].

6.4. Трехмерные задачи в теории распространения электромагнитных волн

В этом разделе рассматривается задача о нахождении в установившемся режиме гармонически изменяющихся во времени с частотой ω электромагнитных полей в волноводах

или резонаторах, содержащих элементы произвольной формы, выполненные из идеально проводящих материалов, либо линейных, изотропных диэлектриков и магнитных материалов без потерь. Предполагается, что рассматриваемые системы всегда ограничены идеальными проводниками, кроме отдельных поверхностей, на которых заданы тангенциальные составляющие поля. При этом вся область определения полей, конечно, замкнута.

Задачи такого рода возникают при определении характеристик рассеяния на неоднородностях в волноводах и при анализе СВЧ-резонаторов. Во многих случаях решение возможно в двумерном приближении, но неизбежно встречаются и такие ситуации, когда единственно приемлемым является трехмерный анализ. Хотя использование V и A для этой цели в общем не исключается, сложности в применении трехмерных краевых условий для этих переменных указывают на целесообразность использования непосредственно векторов поля E и H . Можно показать, что в таких случаях функционалы (2.62) и (2.72) приводятся непосредственно к выражениям

$$F(H') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\text{rot } H')^2 / \epsilon_r - k^2 \mu_r H'^2] d\Omega, \quad (6.124)$$

$$F(E') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [k^2 \epsilon_r E'^2 - (\text{rot } E')^2 / \mu_r] d\Omega, \quad (6.125)$$

где $k = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$, $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ и $\mu_r = \mu / \mu_0$ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости. (Тонкие различия между значениями H и E , удовлетворяющими уравнениям Максвелла, и H' , E' — пробными функциями, которые обеспечивают стационарность функционала, в настоящем разделе не обсуждаются.)

Соотношения (6.124) и (6.125) были выведены в гл. 2 в предположении о том, что μ_r и ϵ_r могут принимать комплексные значения, что соответствует либо пространственному, либо временному затуханию. Однако многие задачи касаются случаев без потерь, в которых μ_r , ϵ_r и k являются чисто вещественными величинами. Тогда ясно, что как вещественная, так и мнимая части комплексного выражения $H = H_r + iH_i$ должны по отдельности удовлетворять уравнению

$$\text{rot rot } H = k^2 \mu_r \epsilon_r H. \quad (6.126)$$

Анализ показывает, что стационарный функционал $F(H)$ соответствует уравнению (6.126) и краевым условиям (см. разд. 2.4). Таким образом, $F(H_r)$ и $F(H_i)$ по отдельности достигают экстремума для функций, соответствующих решению

электродинамической задачи. Поскольку

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^* = H_r^2 + H_i^2, \quad (6.127)$$

где $\mathbf{H}^*$ — величина, комплексно сопряженная с $\mathbf{H}$, то очевидно, что функционал

$$F(\mathbf{H}, \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\operatorname{rot} \mathbf{H})(\operatorname{rot} \mathbf{H}^*)/\epsilon_r - k^2 \mu_r \mathbf{H}\mathbf{H}^*] d\Omega \quad (6.128)$$

стационарен при условии, что рассматривается случай без потерь. Можно также показать, что и функционал

$$F(\mathbf{H}_r, \mathbf{H}_i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\operatorname{rot} \mathbf{H}_r)(\operatorname{rot} \mathbf{H}_i)/\epsilon_r - k^2 \mu_r \mathbf{H}_r \mathbf{H}_i] d\Omega \quad (6.129)$$

стационарен для случая без потерь.

Подобные рассуждения позволяют записать функционалы для электрического поля, альтернативные функционалу (6.125). Функционал (6.128) и его аналог для электрического поля использовались Феррари и Мейлом [5] для построения системы уравнений методом конечных элементов, необходимой для решения задачи о неоднородностях в волноводе. При этом использовались тетраэдральные элементы первого порядка. Этот подход здесь будет расширен и развит на основе более общих функционалов (6.124) и (6.125). Будем использовать уравнения для магнитного поля $\mathbf{H}$. Однако, после того как поле приближенно найдено методом конечных элементов, можно при необходимости найти вектор $\mathbf{E}$ с такой же точностью, используя уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}. \quad (6.130)$$

Аналогичное рассмотрение возможно и для вектора $\mathbf{E}$, поскольку оказывается, что соответствующие программы для ЭВМ можно легко использовать для любой из этих переменных.

6.4.1. Решение для магнитного поля $\mathbf{H}$

Рассмотрим замкнутую поверхность S , которая состоит из поверхностей S_1 и S_2 и охватывает объем интегрирования Ω . На поверхности S_1 задается обобщенное однородное условие Неймана

$$[n \operatorname{rot} \mathbf{H}] = 0, \quad (6.131)$$

которое в силу уравнения (6.130) и граничных условий для электрического поля соответствует идеально проводящей стенке или короткому замыканию цепи. На поверхности S_2 предполагается выполнение либо обобщенного условия Ди-

рихле, либо однородного условия

$$[\mathbf{Hn}] = 0, \quad (6.132)$$

или же неоднородного условия

$$[\mathbf{Hn}] = \mathbf{H}_p. \quad (6.133)$$

Однородное условие обращения в нуль тангенциальной составляющей $\mathbf{H}$ соответствует плоскостям симметрии электрического поля (разомкнутая цепь), тогда как неоднородное условие — заданию тангенциальной составляющей $\mathbf{H}$ на поверхностях или «окнах» вводов, соединяющих устройство с внешним пространством. В гл. 2 было показано, что если замкнутая поверхность S образована из частей, например из поверхностей типа S_1 и S_2 , то тогда функционал $F(\mathbf{H})$, определяемый выражением (6.124), стационарен. Практически это означает, что при любом расчете методом конечных элементов на любой идеально проводящей границе всем трем компонентам $\mathbf{H}$ представлена возможность произвольно меняться без каких-либо ограничений. В случае же краевых условий Дирихле должны быть заданы две тангенциальные составляющие, и лишь одна нормальная компонента может свободно изменяться. Объем Ω разбивается на тетраэдры, в каждом из которых характеристики материала ϵ_r и μ_r постоянны, хотя они и могут изменяться скачком на границах между элементами.

6.4.2. Выражения для единичного тетраэдра

В каждом тетраэдре поле аппроксимируется выражением

$$\mathbf{H} = \sum_{m=1}^N \mathbf{H}^m \alpha_m(\xi), \quad (6.134)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ — вектор с тремя линейно независимыми симплексными координатами, рассмотренный в разд. 6.2.1, а $\alpha_m(\xi)$ — одноиндексные интерполяционные полиномы, введенные в разд. 6.2.2 и 6.2.3. Как и ранее, величина m обозначает одну из $N = 1/6(n_0 + 1)(n_0 + 2)(n_0 + 3)$ узловых точек объема V , который разбит на ячейки для аппроксимации решения полиномом степени n_0 . Для некоторого упрощения сложной системы обозначений часть индексов записана сверху, что не следует путать с возведением в степень. Другим элементом в записи, который можно опустить, является знак суммирования, подобный приведенному в выражении (6.134). Поэтому появление повторяющегося индекса, как, например, в формуле (6.134), будет означать суммирование по всем значениям m (в данном случае $m = 1, 2, \dots, N$). Как

было показано в разд. 6.2.2 и 6.2.3, полиномы α_m таковы, что пробная функция для $\mathbf{H}$ (6.134) автоматически соответствует неизвестному набору векторов $\mathbf{H}^m$, определяющему значения $\mathbf{H}$ в каждом узле m . Выражение (6.134) можно подставить в функционал (6.124) для того, чтобы получить функционал, соответствующий только одному элементу

$$F = \frac{1}{2} H_s^m H_t^n \left(\frac{V}{\epsilon_r} \hat{Q}_{mn}^{ij} K_{ij}^{st} - V \mu r^2 k^2 \delta_{st} T_{mn} \right), \quad (6.135)$$

где H_s^m — компонента вектора $\mathbf{H}^m$ в декартовой системе координат,

$$\hat{Q}_{mn}^{ij} = 6 \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial \alpha_n}{\partial \xi_j} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (6.136)$$

$$T_{mn} = 6 \int_{\Omega} \alpha_m \alpha_n d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (6.137)$$

$$K_{ij}^{st} = \delta_{st} \frac{\partial \xi_i}{\partial r_w} \frac{\partial \xi_j}{\partial r_w} \frac{\partial \xi_i}{\partial r_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial r_s}. \quad (6.138)$$

В выражении (6.138) суммирование по повторяющимся индексам не производится, индексы $m, n = 1, 2, \dots, N$ обозначают номера узлов тетраэдра, $s, t, w = 1, 2, 3$ обозначают оси декартовых координат, индексы $i, j = 1, 2, 3, 4$ обозначают номера вершин тетраэдра, $\delta_{st} = 1$, если $s = t$, $\delta_{st} = 0$, если $s \neq t$ (символ Кронекера). При интегрировании в выражениях (6.136) и (6.137) следует иметь в виду, что $\xi_4 = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$. Естественно, что совершенно безразлично, какое именно из ξ_s исключается подобным образом. Получаемый результат соответствует схеме, установленной для случая одной переменной, и его можно сформулировать следующим образом:

- 1) находятся две матрицы $\hat{Q}$ и T , которые не зависят от геометрии тетраэдра (если не считать масштабных изменений) и могут быть рассчитаны раз и навсегда;
- 2) определяется массив K размерностью 12×12 , который должен рассчитываться для каждого элемента и который является простой функцией декартовых координат вершин тетраэдра, не включающей интегрирования по объему.

Матрица T уже рассматривалась ранее в разд. 6.2. Матрица $\hat{Q}$ тесно связана с матрицей Q , рассмотренной в том же разделе, однако она не обладает некоторыми видами симметрии, существовавшими в более простом случае. Вследствие этого сохраняется несколько более общая форма матрицы $\hat{Q}$. Матрицы $\hat{Q}$ и T были рассчитаны для полиномов вплоть до четвертого порядка и успешно использовались при расчете волноводов.

Используя функционал (6.135), можно записать соотношение для составляющих поля в узлах тетраэдра на языке симметричной матрицы W и вектора-столбца H_c

$$F = \frac{1}{2} H_c^T W H_c. \quad (6.139)$$

6.4.3. Построение глобальных матриц

Как и ранее, простая квадратичная форма выражения (6.139) позволяет записать функционал для объединенного ансамбля тетраэдральных элементов в виде

$$F_c = \frac{1}{2} H_c^T C^T W_d C H_c. \quad (6.140)$$

Таким образом, выражение (6.139) служит для представления как единичного тетраэдра, так и совокупности соединенных элементов при условии, что в последнем случае W представляет глобальную матрицу, составленную определенным образом из массивов, описывающих отдельные тетраэдры, а H_c является вектором, представляющим все компоненты поля в узлах объединенных тетраэдров. Как можно было интуитивно ожидать по аналогии с двумя задачами, относительная магнитная проницаемость μ , и относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r , хотя они и считаются постоянными в пределах каждого тетраэдра, могут изменяться скачком при переходе от одного тетраэдрального элемента к другому. Это позволяет точно моделировать изменяющиеся по объему μ и ϵ_r при условии, что объемы тетраэдров достаточно малы.

Теперь на соотношение для глобальной матрицы (6.139) должны быть наложены описанные ранее краевые условия. Как было показано в разд. 6.4.1, естественное однородное граничное условие Неймана, соответствующее идеальным проводникам, не требует каких-либо ограничений для переменных на границе. Однако условие Дирихле, соответствующее либо связи с внешним пространством через «окна» (неоднородные условия Дирихле), либо плоскости симметрии (однородные условия Дирихле), требует ограничения на компоненты $\mathbf{H}$ в плоскости границы. Для упрощения этого ограничения допускается, чтобы поверхности Дирихле состояли только из небольшого числа плоскостей, каждая из которых перпендикулярна одной из трех декартовых осей задачи. Затем, задав $[\mathbf{Hn}] = \mathbf{P}$ на плоскости, перпендикулярной, например, оси z , налагаем условия $H_x = -P_y$ и $H_y = P_x$, полагая, что H_z свободно изменяется. При этом матричное выражение

(6.139) представляется следующим образом:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_f^T \mathbf{W}_{ff} \mathbf{H}_f + \mathbf{H}_f^T \mathbf{W}_{fp} \mathbf{H}_p + \frac{1}{2} \mathbf{H}_p^T \mathbf{W}_{pp} \mathbf{H}_p. \quad (6.141)$$

Здесь $\mathbf{H}_f$ и $\mathbf{H}_p$ являются соответственно вектор-столбцами свободных и заданных составляющих $\mathbf{H}$. Наконец, чтобы найти соответствующее решение задачи, рассматривается экстремум функционала F по отношению к вектору $\mathbf{H}_f$. Это приводит к линейному матричному уравнению

$$\mathbf{W}_{ff} \mathbf{H}_f = -\mathbf{W}_{fp} \mathbf{H}_p, \quad (6.142)$$

которое может быть решено относительно неизвестного вектора $\mathbf{H}_f$.

6.4.4. Применение к волноводным задачам

Приложением только что рассмотренного метода является определение характеристик рассеяния, вызванного неоднородностями в волноводных устройствах. Типичная структура показана схематически на рис. 6.9. Два полых цилиндрических

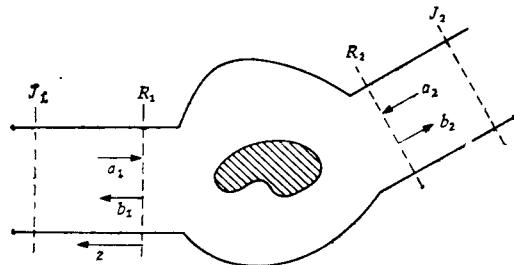


Рис. 6.9. Типичная задача о рассеянии в волноводном двухполюснике.

волновода с идеально проводящими стенками и различными поперечными сечениями сходятся к полости неправильной формы, содержащей линейный изотропный материал без источников поля. Задача состоит в вычислении матрицы рассеяния области соединения волноводов для основной моды в волноводе в отсчетных плоскостях R_1 и R_2 .

Матрица рассеяния СВЧ-многополюсника $\mathbf{S}$ определяется через комплексные коэффициенты a и b , представляющие нормализованные амплитуды падающей и отраженной волны в каждом из концов волноводов. В случае двухпроводной передающей линии без потерь с характеристическим импедансом Z_{0n} , подсоединенной к n -му входу многополюсного устройства, нормализованные амплитуды определяются через напряжения или токи падающей и отраженной волн следую-

щим образом:

$$a_n = Z_{0n}^{-1/2} V_{n+} = -Z_{0n}^{1/2} I_{n+}, \quad (6.143)$$

$$b_n = Z_{0n}^{-1/2} V_{n-} = -Z_{0n}^{1/2} I_{n-}. \quad (6.144)$$

Как следует из теории цепей, средняя мощность, поступающая на n -й вход, равна

$$W_n = \frac{1}{2} (a_n a_n^* - b_n b_n^*). \quad (6.145)$$

В таком случае определение матрицы $\mathbf{S}$ двухполюсника не представляет трудностей

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \quad (6.146)$$

Как видно, матрица рассеяния $\mathbf{S}$ представляет собой обобщенный коэффициент отражения по напряжению. Теория матриц рассеяния применительно к двухпроводным линиям с достаточной полнотой представлена в трудах Рамо, Уиннери и ван Дюзера [6] и Коллина [7]. Волноводы являются лишь несколько иным вариантом высокочастотных линий передачи. Поэтому анализ и применение параметров рассеяния, хотя они и следуют из другого подхода, можно свободно распространять на волноводы.

Поскольку в волноводах легко измерить коэффициенты отражения, в экспериментальном определении элементов матрицы рассеяния $\mathbf{S}$ не возникает особых трудностей. Однако при попытке рассчитать $\mathbf{S}$ по геометрическим и физическим характеристикам n -полюсника обнаруживается, что в волноводах нельзя однозначно определить токи и напряжения. Вместо этих величин определяются нормализованные амплитуды волн a и b . Чтобы получить однозначные результаты, необходимо отнести коэффициенты к конкретной волне (обычно к основной моде волновода). Действительные векторы $\mathbf{e}(x, y)$ и $\mathbf{h}(x, y)$, пропорциональные поперечным электрическим и магнитным полям (распространяющимся, например, в направлении z), определяются так, что

$$\oint_P [\mathbf{e} \mathbf{h}] d\mathbf{S} = 1, \quad (6.147)$$

$$\frac{|\mathbf{e}|}{|\mathbf{h}|} = Z_w, \quad (6.148)$$

где P — плоскость, перпендикулярная оси волновода (ось z), а Z_w — волновой импеданс моды (см. работу [6], стр. 404, 409). Фактическое распределение поперечных полей в волноводе можно представить по отношению к плоскостям R_1 и R_2

в виде

$$\mathbf{E}_t = [b \exp(-i\beta z) + a \exp(i\beta z)] \mathbf{e}, \quad (6.149)$$

$$\mathbf{H}_t = [b \exp(-i\beta z) - a \exp(i\beta z)] \mathbf{h}. \quad (6.150)$$

Мощность СВЧ-волны, распространяющейся по волноводу, получаемая путем интегрирования вектора Пойнтинга по сечению волновода

$$W = \frac{1}{2} \int_{\sigma} [\mathbf{E}_t \mathbf{H}_t^*] dS, \quad (6.151)$$

равна

$$W = \frac{1}{2} (aa^* - bb^*), \quad (6.152)$$

что согласуется с выражением (6.145).

Теперь можно сформулировать общий порядок определения матрицы $\mathbf{S}$. Для двухполюсника, показанного на рис. 6.9, поля в двух сечениях J_1 и J_2 входного и выходного волноводов задаются соответственно с помощью произвольно выбранных коэффициентов A_1 и A_2

$$\mathbf{H}_{t1} = A_1 \mathbf{h}, \quad (6.153)$$

$$\mathbf{H}_{t2} = A_2 \mathbf{h}. \quad (6.154)$$

Такая запись представляет неоднородные условия Дирихле и завершает формулировку краевых условий для данной системы (напомним, что идеально проводящие стенки двухполюсника соответствуют однородному условию Неймана). Далее можно составить матрицы и записать заданные векторы, входящие в уравнение (6.142), и вычислить свободные для варьирования компоненты поля $\mathbf{H}_t$. Сравнение выражения (6.150) и вычисленных значений поля вблизи плоскости J_1 и J_2 позволяет определить коэффициенты отражения b_1/a_1 и b_2/a_2 . При этом предполагается, что плоскости J_1 и J_2 расположены достаточно далеко от неоднородной области, так что все затухающие поля имеют здесь бесконечно малые амплитуды. Несложные алгебраические преобразования уравнения (6.146) показывают, что

$$S_{21}S_{12} = \left(\frac{b_1}{a_1} - S_{11}\right) \left(\frac{b_2}{a_2} - S_{22}\right). \quad (6.155)$$

Если все материалы в рассматриваемом двухполюснике изотропны, то $S_{12} = S_{21}$. Очевидно, для вычисления S_{11} , S_{22} и S_{12} достаточно найти три независимых выражения для b_1/a_1 и b_2/a_2 .

Несмотря на то что с помощью рассматриваемого здесь метода можно рассчитывать участки волноводов с неоднородностями при наличии потерь, весь проводимый далее анализ будет ограничен случаем, когда потерь нет. Надо отметить,

что при таком ограничении матрицы в уравнении (6.142) будут чисто вещественными. Однако выражения для поля в уравнении (6.142) даже в случае без потерь, вообще говоря, будут комплексными. Поэтому, чтобы решить задачу по нахождению полей при отсутствии потерь, в общем случае необходимо использовать комплексные числа. Если, однако, где-либо в одном из волноводов, показанных на рис. 6.9, имеет место короткое замыкание или разомкнутая цепь, то все излучение, поступающее в волновод, будет полностью отражаться. Поскольку поток энергии при этом равен нулю, то везде внутри системы выполняется соотношение $aa^* = bb^*$. В системе связанных волноводов существует стоячая волна, которая в любой однородной части системы характеризуется бесконечным коэффициентом стоячей волны. Легко показать, что в таких случаях поля (6.149) и (6.150) можно представить вещественными числами. Очевидно, можно упростить задачу, предполагая, что одна из плоскостей «окон», например J_1 , представляет разомкнутую цепь $\mathbf{H}_t = 0$, $b_1/a_1 = 1$, либо короткозамкнутую цепь $\mathbf{E}_t = 0$, $b_1/a_1 = -1$ (см. выражения (6.149) и (6.150)). В этом случае одно из соотношений b/a , необходимых для определения $\mathbf{S}$, будет известно заранее. Три требуемых значения коэффициента отражения b_2/a_2 можно получить, изменяя положение плоскости J_1 короткого замыкания или разомкнутой цепи J_2 , сохраняя неизменным положение плоскости J_2 . Заметим, что этот способ аналогичен обычному определению параметров рассеяния (см., например, книгу Сачера и Фокса [8]). Наряду с определением b_2/a_2 в плоскости J_2 можно использовать другую возможность, а именно изменять положение J_2 для каждого из трех выбранных положений J_1 . В каждом из трех случаев при фиксированном $\mathbf{H}_t$ в конце концов можно найти такое положение J_2' , при котором решение для вектора $\mathbf{H}_t$ из уравнения (6.142) даст бесконечную величину. Это соответствует определению положения узловой плоскости ($\mathbf{H}_t = 0$) в резонаторе без потерь, который образуется при коротком замыкании в плоскости J_1 . Пусть положение узловой плоскости J_2' определяется координатой $z = s$ (см. рис. 6.10). Независимо от того, удастся ли найти подобную плоскость, она объективно существует (очевидно, при этом второй волноводный вход должен быть

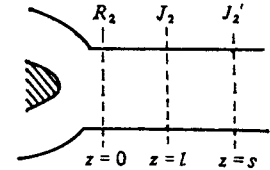


Рис. 6.10. Положение опорной плоскости R_2 , выходной плоскости J_2 и плоскости короткого замыкания J_2' (реальной либо подразумеваемой).

достаточно протяженным). Тогда $H_t = 0$ при $z = s$, так что в плоскости J_2 в соответствии с выражением (6.150)

$$H_{t2} = A_2 \{ \exp[-i\beta(z-s)] - \exp[i\beta(z-s)] \} h, \quad (6.156)$$

$$H_{t2} = -2iA_2 \sin[\beta(z-s)] h. \quad (6.157)$$

Поскольку амплитуды поля считаются вещественными, то произвольная амплитуда A_2 при этом должна быть мнимой. Из выражения (6.156) очевидно, что требуемые коэффициенты отражения в плоскости J_2

$$b_2/a_2 = \exp(2i\beta s). \quad (6.158)$$

Значения S находятся либо прямым, квазирезонансным методом, либо же в точках сетки слева от J_2 исследуются рассчитанные поля и определяется значение S , согласующееся с выражением (6.157).

6.4.5. Расчет S на основе функционала

Мы рассмотрели два довольно очевидных метода определения коэффициента отражения для короткозамкнутой или разомкнутой системы волноводов. В третьем, не столь очевидном методе используется функционал $F(H)$. Этот метод сам по себе заслуживает достаточно подробного рассмотрения, так как воплощает принцип, вытекающий из стационарности функционала, который очень важен в методе конечных элементов. Несмотря на то что приближенный функционал $F(H')$ строится кусочно из простых пробных функций в пределах каждого элемента, он все же очень близок к истинному значению $F(H)$. Это обусловлено стационарностью функционала F . Если $H' = H + \delta H$ характеризует точность решения, полученного с помощью конечных элементов, то $F(H')$ определяется с точностью до величины порядка $(\delta H)^2$

$$F(H') = F(H) + O(\delta H^2). \quad (6.159)$$

Выражаясь несколько упрощенно, функционал $F(H')$ и производные от него величины являются результатом усреднения по всем узлам системы, тогда как методы, в которых используется сама величина H' , соответствуют усреднению всего лишь по нескольким узлам.

Теперь исследуем значение функционала

$$F(H') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\text{rot } H)^2/\epsilon_r - k^2 \mu_r H^2] d\Omega. \quad (6.160)$$

Используем векторное тождество

$$(\text{rot } H)^2 = \text{div}[H \text{ rot } H] + H \text{ rot rot } H, \quad (6.161)$$

так что формула (6.160) примет вид

$$F(H) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ H(\text{rot rot } H/\epsilon_r - k^2 \mu_r H) + \text{div}[H \text{ rot } H]/\epsilon_r \} d\Omega. \quad (6.162)$$

Поскольку выражение $(\text{rot rot } H/\epsilon_r - k^2 \mu_r H)$ обращается в нуль при H , удовлетворяющем уравнениям Максвелла, с помощью теоремы Остроградского — Гаусса получаем

$$F(H) = \frac{1}{2} \int_S \frac{[H \text{ rot } H]}{\epsilon_r} dS. \quad (6.163)$$

Используя уравнение Максвелла

$$\text{rot } H = i\omega\epsilon_0\epsilon_r E, \quad (6.164)$$

находим

$$F(H) = \frac{1}{2} i\omega\epsilon_0 \int_S [HE] dS = \frac{1}{2} i\omega\epsilon_0 \int_S [En] H dS. \quad (6.165)$$

Рассматривая теперь задачу об объемном резонаторе (первый вход волноводной системы характеризуется либо коротким замыканием $[En] = 0$, либо разомкнутой цепью $H_t = 0$), можно видеть, что поверхностный интеграл в выражении (6.165) обращается в нуль везде, кроме входной плоскости J_2 . На плоскости второго входа из выражений (6.149) и (6.150) с помощью обозначения $(b_2/a_2)\exp(-2i\beta l) = \rho$ получаем

$$E_t = a_2 e^{i\beta l} (\rho + 1) e, \quad (6.166)$$

$$H_t = a_2 e^{i\beta l} (\rho - 1) h, \quad (6.167)$$

так что

$$F(H) = \frac{1}{2} i\omega\epsilon_0 a_2^2 e^{2i\beta l} (\rho + 1)(\rho - 1) \int_{J_2} [eh] dS. \quad (6.168)$$

Однако на J_2 были заданы условия Дирихле

$$H_t = A_2 h. \quad (6.169)$$

По определению $\int [eh] dS = 1$, поэтому используя выражение (6.167), можно исключить a_2^2 , и функционал принимает вид

$$F(H) = \frac{1}{2} i\omega\epsilon_0 \left(\frac{\rho + 1}{\rho - 1} \right) A_2^2. \quad (6.170)$$

Как уже отмечалось, $F(H')$ является очень хорошим приближением к $F(H)$, основанным на подстановке H' в соотношение

$$F(H') = \frac{1}{2} (H')^T W H. \quad (6.171)$$

Поэтому из формулы (6.170) можно получить хорошее приближение для ρ и, следовательно, для a_2/b_2 . Затем, как было

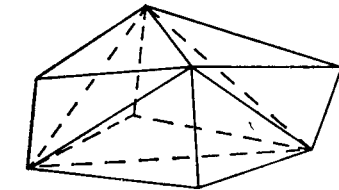
показано ранее, можно вычислить матрицу рассеяния S , помещая короткозамыкающую плоскость J_1 в трех различных местах волновода.

6.4.6. Металлическая сфера в волноводе

Описанные выше численные методы были реализованы в большой программе. Исходными данными в этой программе служат величина $k = \omega(\mu_0\epsilon_0)^{1/2}$, задаваемая для всей области задачи, и значения μ_r и ϵ_r , задаваемые для каждого отдельного элемента. Геометрические данные задаются посредством

разделения объема задачи на гексаэдры и пентаэдры (восьмиугольные и шестиугольные «кирпичики»).

Программа обеспечивает дальнейшее разделение указанных элементов на тетраэдры (по пять на гексаэдр и по три на пентаэдр — см. рис. 6.11). Вводится также информация о краевых условиях — однородное или неоднородное условия Дирихле. Решается матричное уравнение (6.142), и подстановкой H_i в матричные уравнения обеспечивается возможность вычисления приближенного значения стационарного функционала $F(H')$.



а



б

Рис. 6.11. Конечные элементы для расчета трехмерных полей. а) Гексаэдр — 8 узлов и 5 составляющих его тетраэдров. б) Пентаэдр — 6 узлов и 3 составных тетраэдра.

Типичной задачей, для решения которой действительно необходим трехмерный анализ, является расчет параметров рассеяния металлической сферы, размещенной симметрично внутри прямоугольного волновода, в котором распространяется волна основной моды (типы волн в волноводе рассмотрены в разд. 2.7). Благодаря симметрии задачи $S_{11} = S_{22}$. Как показано в работе Коллина [7], на основе закона сохранения энергии в системе без потерь в случае

$$S_{11} = S_{22} = S \exp(i\Phi) \quad (6.172)$$

имеет место выражение

$$S_{12} = \pm i(1 - S^2)^{1/2} \exp(i\Phi). \quad (6.173)$$

Поэтому в данном случае необходимо определять только один комплексный параметр. В качестве переменной исполь-

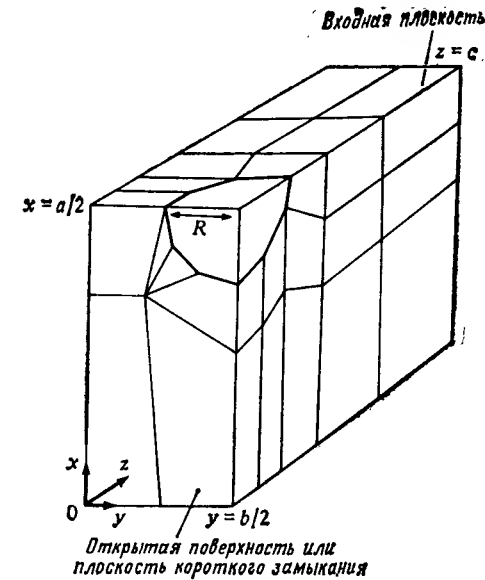


Рис. 6.12. Дискретизация для задачи о металлической сфере. Моделируется одна четвертая часть пространства задачи. R — радиус сферы. Использовано 19 пентаэдров и 20 гексаэдров второго порядка. Внутри сферы не требуется разбиение на элементы.

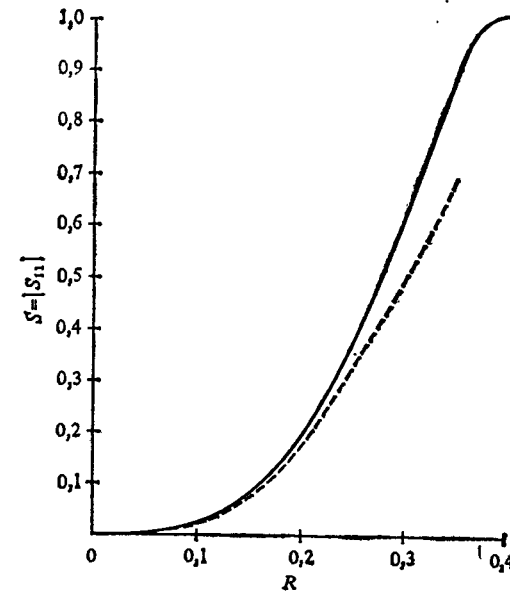


Рис. 6.13. $|S_{11}|$ как функция R (м) для металлической сферы в прямоугольном волноводе при возбуждении в нем волны $TE_{1,0}$. Сплошная кривая получена методом возмущений Хинкена [9], штриховая — методом конечных элементов,

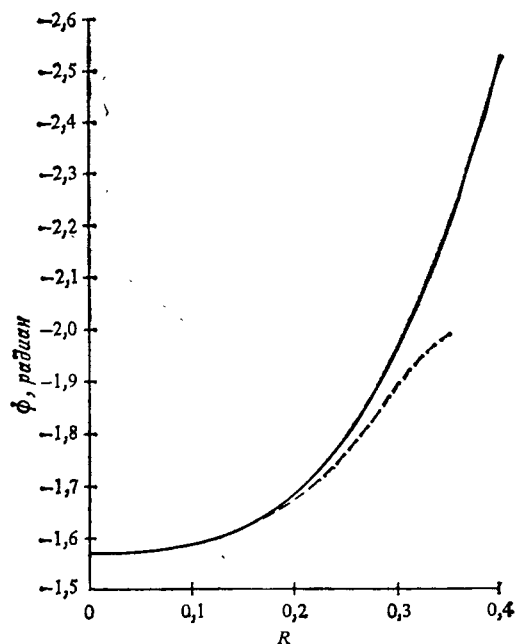


Рис. 6.14. Аргумент S_{11} как функция R (м) для задачи о металлической сфере. Сплошная кривая получена методом возмущений Хинкена [9], штриховая — методом конечных элементов.

зовался вектор $\mathbf{H}$, поэтому на криволинейной поверхности сферы и стенок волновода использовались естественные краевые условия (однородные условия Неймана). Задача имеет три плоскости симметрии, так что моделировать необходимо только одну восьмую ее часть. Использовались девятнадцать пентаэдров и двадцать гексаэдров второго порядка. Две плоскости симметрии, параллельные оси волновода, обеспечивают «однородные границы Дирихле» (поперечные компоненты $\mathbf{H}$ обращаются в нуль, на нормальные компоненты $\mathbf{H}$ дополнителные условия не накладываются). Третья плоскость симметрии, рассекающая сферу пополам и перпендикулярная оси волновода, может быть принята либо за «плоскость короткого замыкания» (условие Неймана), либо за «плоскость разомкнутой цепи» (условие Дирихле). Это, очевидно, эквивалентно перемещению короткозамыкающей плоскости J_1 , расположенной далеко от сферы, в два различных места, в то время как третья плоскость симметрии не используется. Поскольку определяться должен только один комплексный параметр S_{11} , перемещать закорачивающую плоскость в третье положение не требуется. Во входной плоскости $z = c$

для волны TE_{10} должно выполняться неоднородное условие Дирихле $H_t = A \cdot (h_x, h_y)$, где (см. книгу [6])

$$h_x = \sin(\pi x/a), \quad h_y = 0, \quad (6.174)$$

A — произвольная постоянная. На рис. 6.12 показано использованное разбиение на элементы. Полученные результаты (рис. 6.13 и 6.14) сравниваются с другим и, по-видимому, единственным решением, полученным иным способом — методом возмущений Хинкена [9]. Как видно из этих рисунков, для сфер с малым относительным диаметром оба решения дают близкие результаты. Однако, как и можно было ожидать в случае применения метода возмущений, расхождение возникает, когда диаметр сферы приближается к наименьшему характерному размеру волновода (здесь размеры были 1×2 м). Следует отметить, что метод конечных элементов не должен быть особенно чувствительным к размерам сферы, поэтому можно утверждать, что при расхождении результатов более точные данные обеспечивает метод конечных элементов.

6.5. Краткий обзор литературы

Трехмерный анализ задач электромагнетизма является одним из наименее развитых разделов метода конечных элементов, рассматриваемых в этой книге (по крайней мере к моменту ее написания). То, что этот вопрос до настоящего времени недостаточно разработан, объясняется не малой актуальностью, а скорее связанными с ним трудностями. Многие из очень важных задач, включая, например, магнитостатический расчет электрических машин, в действительности являются трехмерными. Исторически использование конечных элементов в строительной механике предшествовало использованию этого метода в электро- и радиотехнике. Поэтому частично методика трехмерного анализа освещена в типовых работах, посвященных задачам строительной механики: например, Зенкевича [4], Норье и де Вриза [10], Десаи и Абеля [11]. Однако специализированный характер рассматриваемых там задач снижает ценность этих работ для электро- и радиоинженеров.

Хорошее представление об очень важных вопросах трехмерного расчета полей дают статьи Симкина и Тробринджа [2, 3].

Численное решение уравнений метода конечных элементов

7.1. Введение

В методе конечных элементов задачи, описываемые интегральными или дифференциальными уравнениями, заменяются на эквивалентные задачи матричной алгебры, для решения которых используются ЦЭВМ.

Так, для граничных задач или интегральных уравнений Фредгольма в электромагнетизме метод конечных элементов приводит к матричному уравнению вида

$$(A + pB)x = y, \quad (7.1)$$

где A и B — матрицы, x — неизвестный вектор, компоненты которого требуется определить, y — известный вектор, а p — скалярный параметр. Это уравнение имеет нетривиальное решение, когда A — положительно определенная матрица и либо (1) p известно и y не равняется нулю, либо (2) p неизвестно и y тождественно равно нулю.

Задачи первого типа обычно называются детерминированными, поскольку они дают единственный вектор решения x (при условии, что значение p не соответствует ни одному решению второго типа). Второй тип задач называют задачами на собственные значения; они имеют столько решений для x , сколько строк в матрице, причем каждое соответствует одному частному значению p . Значения p и x получаются в результате решения, так что каждое решение по существу представляет скалярно-векторную пару (p, x) . На первый взгляд может показаться, что в этом случае система из N уравнений дает $N + 1$ решение, N компонентов x и значение p . Однако это не так. Поскольку подобные уравнения всегда однородны, их решения однозначны лишь с точностью до постоянного множителя, т. е. если x — решение, то kx тоже является решением (k — произвольное число). Следовательно, вектор x имеет только $N - 1$ степеней свободы.

Многие полезные для практики двумерные задачи теории поля приводят к матричным уравнениям с $10^2 \dots 10^3$ переменными, а для расчета трехмерных векторных полей в сложных геометрических структурах может потребоваться $5 \cdot 10^4 \dots 25 \cdot 10^4$ переменных. Для современных ЭВМ решение совместной системы ста уравнений не составляет про-

блемы независимо от структуры матрицы коэффициентов. Систему тысячи уравнений также можно легко решить, если матрица коэффициентов содержит много нулей и программа организована так, чтобы использовать это преимущество. При полной матрице коэффициентов, содержащей всего несколько нулевых элементов или вовсе не содержащей их, 10^3 уравнений — довольно большое число, так как для запоминания только матрицы коэффициентов потребуется около четырех мегабайт памяти ЭВМ.

Как правило, матрицы коэффициентов, полученные из интегральных уравнений, оказываются полными или почти полными. С другой стороны, дискретизация дифференциальных уравнений методом конечных элементов обычно дает разреженные матрицы, так как любая узловая переменная непосредственно связывается только с узловыми переменными того же конечного элемента. Следовательно, количество ненулевых элементов в строке матрицы зависит от типа используемых элементов и мало зависит от типа задачи. Поэтому большие системы уравнений, полученные дискретизацией дифференциальных уравнений, обычно очень разреженные.

Данная глава посвящена наиболее общим методам, используемым в настоящее время для решения детерминированных задач, возникающих при их анализе методом конечных элементов. Решение уравнений, как и многое другое в технике метода конечных элементов, — это весьма специализированная область. Поэтому новичку в этой области целесообразно использовать уже готовые программы и не пытаться писать их самому. Цель, которую мы здесь преследуем, как раз и состоит в том, чтобы дать читателю некоторое представление о программах, которыми он мог бы воспользоваться.

7.2. Треугольное разложение матриц

Для реализации метода конечных элементов наибольшее распространение в настоящее время нашли программы, включающие тот или иной вариант треугольного разложения Гаусса. По существу этот метод мало отличается от обычно изучаемого в школе метода последовательного исключения переменных. На каждом этапе исключается одна переменная и так продолжается до тех пор, пока не останется одно уравнение с одним неизвестным. Когда это последнее неизвестное определено, оставшиеся неизвестные находятся последовательно в обратном порядке с помощью подстановки уже известных величин. Эти две фазы процесса обычно называются *прямым исключением* и *обратной подстановкой*.

В больших программах метод треугольного разложения служит в первую очередь для операций с матрицей коэффициентов. Чтобы проиллюстрировать это, предположим, что S — симметричная положительно определенная матрица, какой обычно и является матрица конечных элементов. Можно показать, что такая матрица всегда может быть записана в виде произведения двух «треугольных» матриц

$$S = LL^T, \quad (7.2)$$

где L — нижняя треугольная матрица, которая выше главной диагонали содержит лишь нулевые элементы, верхний индекс T означает транспонирование, так что L^T есть верхняя треугольная матрица. Процесс вычисления нижней треугольной матрицы L называется *треугольной факторизацией* или *треугольным разложением*, а матрица L известна как нижний треугольный множитель матрицы S . Требование положительной определенности матрицы S физически соответствует требованию, чтобы энергия была положительной для любого возбуждения. Это требование, конечно, удовлетворяется для реальных физических систем.

Попробуем теперь решить матричное уравнение, которое типично для метода конечных элементов

$$Sx = y. \quad (7.3)$$

Для этого, согласно (7.2), разложим на множители матрицу S и представим данную операцию в виде пары уравнений

$$Lz = y, \quad (7.4)$$

$$L^T x = z, \quad (7.5)$$

где z — вспомогательный вектор. Поскольку L — треугольная матрица, то строка k может содержать ненулевые элементы только в первых k столбцах. В частности, первая строка L содержит только один ненулевой элемент, так что первая компонента z может быть легко вычислена. Вторая строка L содержит только два ненулевых элемента, следовательно, она связывает только две первые компоненты z ; но так как первая компонента z известна, то теперь может быть вычислена и вторая. Таким образом, решаем систему уравнений (7.4) относительно z . Далее, поскольку матрица L^T также треугольная, аналогичный процесс используется для отыскания x из уравнения (7.5), только теперь требуется обратный порядок операций, так как L^T — верхняя, а не нижняя треугольная матрица.

Очевидно, что ключ к решению уравнений лежит в треугольном разложении матрицы коэффициентов S . Необходимые для этого шаги становятся ясными из анализа ожидае-

мого результата. Детальная запись равенства (7.2) имеет вид

$$S_{ik} = \sum_{j=1}^{\min(i, k)} L_{ij} L_{kj}. \quad (7.6)$$

Заметим, что суммирование по j проводится только до $\min(i, k)$, поскольку элементы над диагональю L равны нулю. Для диагональных элементов уравнение (7.6) может быть решено и приводит к соотношению (суммирование по повторяющемуся индексу не производится)

$$L_{ii} = \left(S_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (7.7)$$

Первая строка L содержит один диагональный элемент

$$L_{11} = S_{11}^{1/2}. \quad (7.8)$$

Во второй (и каждой последующей) строке сумма в формуле (7.6) содержит не больше слагаемых, чем номер столбца k . При последовательной обработке строк каждый раз появляется только одно неизвестное. Таким образом, этот несложный метод кратко можно описать следующей последовательностью операций:

1) положить

$$L_{11} = S_{11}^{1/2};$$

2) в каждой i -й строке вычислить поддиагональный элемент k -го столбца

$$L_{ik} = \left(S_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} L_{kj} \right) / L_{kk} \quad (7.9)$$

и диагональный элемент

$$L_{ii} = \left(S_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2 \right)^{1/2},$$

пока не будет вычислена вся матрица L .

Для иллюстрации рассмотрим симметричную положительно определенную матрицу

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & & & \\ 4 & 5 & 2 & & & \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 10 & -7 & 1 & \\ & 2 & -7 & 14 & & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & & 9 & -8 & -2 \\ & & & 2 & -8 & 9 & \\ & & & 1 & -2 & & 6 \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Места всех нулевых элементов в матрице S оставлены пустыми.

Легко показать, что при использовании описанного метода матрица (7.10) имеет треугольный множитель L (нижнюю) треугольную матрицу):

$$L = \begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \\ 2 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & 3 & & & & \\ & 2 & -3 & 1 & & & \\ & 1 & & -2 & 2 & & \\ & & 2 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & & -2 & 1 & \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Правильность данного выражения может быть, конечно, проверена перемножением матриц согласно уравнению (7.2).

Для завершения примера предположим, что вектор y в правой части уравнения (7.3) равен

$$y^T = [4 \ 1 \ 10 \ -18 \ 16 \ 8 \ -9 \ 1]. \quad (7.12)$$

Решая уравнение (7.4) описанным выше способом исключения переменных, получим вспомогательный вектор z :

$$z^T = [2 \ -3 \ 0 \ -6 \ -2 \ 2 \ -1 \ 1]. \quad (7.13)$$

Тогда искомый вектор x можно определить, решая уравнение (7.5)

$$x^T = [-5 \ 3 \ 3 \ -3 \ -1 \ 2 \ 1 \ 1]. \quad (7.14)$$

Для любой данной матрицы процесс треугольного разложения выполняется лишь один раз. Если будет задано несколько наборов y , то исключение и обратная подстановка должны будут выполняться для каждого из них отдельно. Однако при этом, как будет показано ниже, относительный объем вычислительной работы по исключению переменных и обратной подстановке невелик.

7.3. Программа разложения Холецкого

Для иллюстрации методов, используемых в решении уравнения, может оказаться поучительной простая программа разложения Холецкого. Программа EQSOLV (см. с. 214) вызывается типовой программой метода конечных элементов, приведенной в гл. 1. Она, безусловно, неоптимальна, в ней даже не используется симметрия матрицы для экономии памяти. Однако она, вероятно, проста для чтения и понимания.

После блока COMMON, который обеспечивает доступ к соответствующим переменным вызывающей программы, подпрограмма EQSOLV выполняет треугольное разложение. Для этого используется алгоритм Холецкого в точно такой же, описанной ранее форме. Единственное отличие состоит в том, что первые две (а не только одна первая) строки подвергаются специальной обработке. Необходимость в этом возникает только из-за особенностей языка FORTRAN, в котором цикл DO не может начинаться с нулевого значения индекса DO. Эта особенность языка никоим образом не влияет на сущность математического метода.

Метод разложения Холецкого, использованный в EQSOLV, заполняет все пространство верхней и нижней части матрицы верхним и нижним треугольными множителями. В этом подходе неэкономно расходуется память и в реальных программах он обычно не используется. Однако более сложные методы записи информации, такие, как ленточный или профильный, приводят к усложнению индексации. Поэтому они часто значительно труднее для чтения и понимания. После выполнения разложения Холецкого EQSOLV выполняет исключение переменных и обратную подстановку. В этой процедуре правая часть RTHDSR постепенно стирается и на ее место записывается решение. EQSOLV выполняет треугольное разложение, исключение и обратную подстановку в одной программе, но обычно такая программа делится на две или три подпрограммы.

Выделение треугольного разложения в отдельную программу позволяет проводить решение для нескольких разных правых частей без повторения процедуры разложения. Излишние затраты объема памяти на это незначительны.

7.4. Время и память ЭВМ, необходимые для треугольного разложения

Для оценки эффективности метода треугольного разложения оценим общее время работы и объем памяти ЭВМ. Обе оценки будут приведены для полной (полностью заполненной) матрицы; будут рассмотрены также упрощения, возникающие в случае разреженных матриц.

На каждом шаге выполнения треугольного разложения вычисляется один элемент треугольной матрицы L . Для отыскания k -го элемента i -й строки матрицы L необходимо выполнить k арифметических операций. Каждая такая операция включает одно умножение или деление и одно сложение или вычитание, а также операции, необходимые для описания массива с целью отыскания k -го элемента в i -й строке. Количество операций $M(i)$, необходимых для вычисления i -й

строки треугольной матрицы, определяется суммой операций, требуемых для нахождения элементов этой строки

$$M(i) = \sum_{k=1}^i k = \frac{1}{2}i(i+1); \quad (7.15)$$

кроме того, добавляется еще одна операция — извлечение квадратного корня. Количество операций, необходимых для вычисления всей матрицы, равно сумме операций, необходимых для преобразования отдельных строк

$$M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N k(k+1) = \frac{1}{6}N(N+1)(N+2), \quad (7.16)$$

и N операций по извлечению квадратных корней. Получающееся при этом количество операций характеризует лишь преобразования без учета этапов решения уравнений. Для исключения неизвестных при вычислении только одной правой части необходимо выполнить еще E операций

$$E = \sum_{k=1}^N k = \frac{1}{2}N(N+1). \quad (7.17)$$

Для обратной подстановки необходимо выполнить точно такое же число операций.

Таким образом, во всех практически интересных случаях объем вычислений, связанных с исключением неизвестных и обратной подстановкой, равен объему вычислений, необходимых для одного перемножения матрицы и вектора, что составляет N^2 операций.

В случае когда требуется найти решение (7.3) при разных y для одной и той же матрицы коэффициентов (например, при вычислении магнитного поля системы катушек для ряда различных значений токов), на первый взгляд представляется целесообразным сначала выполнить обращение матрицы коэффициентов, затем умножить каждую новую правую часть на обращенную матрицу. Однако этот подход не дает уменьшения времени счета и часто неэкономно использует память машины — причины этого будут рассмотрены далее.

Наиболее экономичная процедура обращения матрицы состоит в выполнении треугольного разложения, после чего N раз ищется решение, причем в качестве правой части используется один столбец самой матрицы. Несмотря на то что такой способ решения несколько экономнее обычного (при разумном составлении программы можно исключить операции с заранее известными нулями), затраты на непосредственное обращение матрицы всегда больше, чем при треугольном разложении, т. е. обращение всегда по существу включает разложение и сверх того выполнение ряда других

операций. Последующее перемножение матриц и векторов потребует тех же затрат, что и исключение неизвестных совместно с обратной подстановкой. Следовательно, стратегия обращения и перемножения никогда не будет выгоднее, чем разложение — исключение — обратная подстановка.

Для выполнения обращения и записи обращенной матрицы необходим объем памяти, больший, чем при вычислении треугольных множителей, и при этом он зачастую намного больше. Рассмотрим вновь уравнение (7.9), определяющее операции, необходимые для вычисления элемента L_{ik} треугольной матрицы L . Предположим, что элемент S_{i1} исходной матрицы коэффициентов S равен нулю. Из (7.9) видно, что соответствующий элемент L также равен нулю. Далее, если элементы $S_{i2}, S_{i3}, \dots, S_{ik}$ равны нулю, то в сумме (7.9) все слагаемые обращаются в нуль; таким образом, должны обращаться в нуль и соответствующие элементы L . Конечно, это утверждение не выполняется для всех нулевых элементов матрицы S . Если в оставшейся части S_{ik} есть какие-либо ненулевые элементы, то сумма в формуле (7.9) в общем случае не обращается в нуль и соответствующий элемент L скорее всего также будет отличен от нуля. Таким образом, можно заключить, что ненулевые элементы в левой части любой строки L в общем случае всегда соответствуют самым левым ненулевым элементам той же строки матрицы S , но в области между этими элементами и диагональю матрица L может быть более плотной, чем матрица S .

Так как самые левые нулевые элементы строк матрицы L соответствуют самым левым нулевым элементам матрицы S , то в программах эти нули часто не записываются. Таким приемом достигается значительная экономия памяти при записи. В противоположность этому обращенная матрица S в общем случае заполнена и, вообще говоря, не содержит нулей. Для вычисления и хранения обращенной матрицы необходим объем памяти, соответствующий целиком заполненной матрице, тогда как для треугольных матриц обычно хватает значительно меньших объемов памяти. Поэтому требования к объему памяти для обращенных матриц всегда превосходят требования к памяти для матрицы L . Преимуществ в отношении объема требуемой памяти операция обращения матрицы ни при каких обстоятельствах дать не может. Поэтому в практически используемых программах метода конечных элементов обращенные матрицы никогда не вычисляются и не запоминаются. В них всегда выполняется либо треугольное разложение с последующим исключением неизвестных и обратной подстановкой, либо исключение неизвестных и обратная подстановка объединяются с разложением, так что множители в явном виде не записываются.

7.5. Ленточная и профильная формы записи матрицы

Когда треугольное разложение выполнено, то обычно оказывается, что нижняя треугольная матрица L плотнее (содержит меньше нулей), чем исходная матрица. Как было указано выше, самые левые ненулевые элементы в любой строке матрицы L должны в общем случае совпадать с самыми левыми ненулевыми элементами в соответствующей строке исходной матрицы S . Иными словами, все нули на левом крае матрицы S в разложении сохраняются. Нулевые элементы, лежащие справа от самого левого ненулевого элемента, наоборот, в общем случае не воспроизводятся; при этом говорят, что они дополняются. Конечно, в результате численных операций любой отдельный элемент матрицы может оказаться нулевым. Такие нули иногда называют «вычисленными нулями». Рассматриваемые же здесь нули являются следствием топологической структуры матрицы. Они остаются нулями в любой матрице с такой же структурой независимо от ее численных значений и называются «структурными нулями». Для примера рассмотрим матрицу S (7.10). Элементы S_{65} и S_{87} в этой матрице нулевые. Но сравнение с формулой (7.11) показывает, что они дополняются в процессе разложения. С другой стороны, элементы S_{64} и S_{86} становятся в L нулевыми элементами в результате численных операций. Для проверки этого достаточно выполнить разложение для другой матрицы с такой же структурой, как у S , но с иными численными значениями элементов. Значения S_{64} и S_{86} в матрице не всегда остаются нулевыми, хотя левые крайние нули сохраняются.

В программах решения уравнений в принципе должна резервироваться память как для S , так и для L . Очевидно, что резервировать память для крайних левых нулей в S и L не нужно, поскольку они, как известно, при вычислениях всегда остаются нулями. Поэтому запись матриц обычно делается в одной из компактных форм, из которых наиболее распространены ленточная и профильная формы записи.

Пусть S — симметричная матрица. Положим, что самый левый ненулевой элемент в i -й строке появился в столбце $n(i)$. Полуширина M матрицы S определяется выражением

$$M = 1 + \max_i [i - n(i)], \quad (7.18)$$

где максимум ищется по всем i в интервале $0 < i < N + 1$. Ленточная запись производится путем записи M чисел в каждой строке матрицы. Например, первый элемент, записанный в k -й строке, будет относиться к столбцу $k - M + 1$, последний — к столбцу k (диагональный элемент). Пропущенные элементы в первых нескольких строках обычно просто запол-

няются нулями. Например, матрица S в (7.10) может быть записана в едином массиве как

$$\text{band}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 9 \\ & & 1 & 10 \\ & 2 & -7 & 14 \\ 1 & 1 & & 9 \\ & 2 & -8 & 9 \\ 1 & -2 & & 6 \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

В этом представлении все нули, имеющиеся в исходной матрице, для наглядности представлены пробелами. С той же целью нули, введенные искусственно для заполнения первых элементов массива, показаны в явном виде. В этом примере объем ленточной записи даже при относительно небольшой матрице меньше, чем при записи в полной форме: 32 элемента (включая искусственные нули) вместо 37 (используется преимущество, обеспечиваемое симметрией матрицы). Для больших же матриц разница может быть очень велика.

Преимуществом ленточной записи является простота: необходимо лишь один новый информационный параметр — полуширина M . Но и эта форма записи может оказаться относительно малоэффективной, так как многие строки могут содержать еще и структурные нули. В самом деле, в записи вида (7.19) присутствуют четыре структурных нуля. Существует метод так называемой профильной записи, при котором их можно исключить. Для этого записываются только те члены каждой строки, которые расположены между самыми левыми ненулевыми элементами и диагональю. Матрица (7.10) записывается таким способом в виде одномерного массива

$$\begin{aligned} \text{prof}(S) = \\ = [4 \ 4 \ 5 \ 4 \ 2 \ 9 \ 1 \ 10 \ 2 \ -7 \ 14 \ 1 \ 1 \ 0 \ 9 \ 2 \ -8 \ 9 \ 1 \ -2 \ 0 \ 6]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Индексы, соответствующие этим значениям, могут быть восстановлены, если в каждой строке известно положение самого левого ненулевого элемента. Простой способ хранения этой информации состоит в записи положения левых ненулевых элементов $n(i)$ в виде целочисленного массива

$$\text{left}(S) = [1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5]. \quad (7.21)$$

В рассматриваемом здесь случае требуемый объем записи для S сокращен до 22 элементов, к которому следует

прибавить объем записи массива самых левых положений $n(i)$. По сравнению с полной записью в случае больших матриц с несколькими полностью заполненными или почти полностью заполненными строками это сокращение довольно значительное.

Существует еще один метод экономии объема памяти. Тщательное рассмотрение уравнений (7.6)–(7.11) показывает, что после вычисления элементов (i, k) матрицы L соответствующий элемент S больше никогда не используется. Следовательно, нет необходимости запоминать ни S , ни L — достаточно записать в память лишь один из массивов, разместить там S и затем по мере выполнения разложения записывать туда же L . Если же матрица S понадобится для каких-либо целей позднее, то ее можно ввести с любого внешнего запоминающего устройства. Процедуры треугольного разложения, прямого исключения и обратной подстановки остаются неизменными для матриц, записанных в компактной форме. Однако изменения в записи данных приводят к необходимости менять систему индексов (т. е. индексацию массивов в программах). Поскольку нет необходимости выполнять операции с крайними левыми нулями, то в суммах (7.7) и (7.9) можно проводить суммирование, начиная не с $j=1$ (левый край полной матрицы), а от первого ненулевого элемента. Таким образом, формулу (7.9) можно упростить

$$L_{ik} = \left(S_{ik} - \sum_{j=I}^{k-1} L_{ij} L_{kj} \right) / L_{kk}, \quad (7.22)$$

где для ленточной записи нижний предел суммирования равен

$$I = i - M, \quad (7.23)$$

поскольку вне поля записи никакие вычисления не выполняются. Для профильной записи вычисления охватывают лишь массив элементов, не находящихся за пределами левого края строки, так что

$$I = \max [n(i), n(k)]. \quad (7.24)$$

Аналогично следует ограничить и нижний предел суммирования в (7.7).

При выполнении треугольного разложения матрицы в ленточной записи каждый внедиагональный элемент нижней треугольной матрицы вычисляется с использованием соотношения (7.22), а диагональные элементы — с помощью формулы

$$L_{ii} = \left(S_{ii} - \sum_{j=I}^{i-1} L_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (7.25)$$

Следует отметить, что элементы i -й строки вычислены с использованием элементов строки, непосредственно предше-

ствующей i -й. Но строки с номерами, меньшими, чем $i-M+1$, не используются. Следовательно, нет надобности запоминать строки $1, 2, \dots, i-M$ в ОЗУ, необходимы только строки от $(i-M+1)$ -й до i -й. Таким образом, ОЗУ необходимо для хранения элементов ленточной записи для $M+1$ строк, или $1/2(M+1)(M+2)$ чисел. Число столбцов разреженной матрицы зачастую значительно меньше, чем общее количество ее строк N . Поэтому во многих больших программах используется внешнее хранение информации, при котором матрица S (в ленточной записи) записывается на диске, ленте или другом внешнем носителе. Треугольное разложение затем выполняется путем вычисления одной или более строк L , записи их на выходном устройстве и затем переносом оставшихся строк в ОЗУ и считыванием с одной или более дополнительных строк S . Матрицы S и L пропускаются таким образом через память, при этом в них одновременно находятся только по $M+1$ (или менее) строк. Подобным образом обрабатывают матрицы порядка $5 \cdot 10^3 \dots 5 \cdot 10^4$ с шириной порядка 500. Матрицы размером $5 \cdot 10^3$ при $M=500$ для такого «внешнего» треугольного разложения и последующего решения уравнений требуют объема ОЗУ около $125 \cdot 10^3$ слов, что вполне соответствует возможностям современных ЭВМ среднего класса. Запись самой матрицы в ленточной форме требует $25 \cdot 10^5$ слов памяти, или $125 \cdot 10^5$ слов (если разреженность не используется). В этом последнем случае для записи были бы необходимы тысячи метров магнитной ленты.

7.6. Структура матриц конечных элементов

В большинстве используемых программ разреженность матрицы используется для экономии как машинного времени, так и объема памяти. При этом в памяти ЭВМ записываются все нули, находящиеся в пределах ленты или профиля, а нули вне ленты отбрасываются. Поэтому очень важно обеспечить малую ширину матрицы.

Произвольная нумерация узлов конечных элементов довольно редко приводит к хорошей структуре разреженной матрицы. В большинстве реализуемых программ сначала исходят из случайной нумерации узлов, а затем применяют специальные методы для улучшения структуры разреженности матрицы. Известен единственный способ, действительно гарантирующий получение минимальной ширины матрицы, — это перебор всех возможных нумераций.

К сожалению, в задаче с N переменными имеется $N!$ возможных нумераций, поэтому метод непосредственного перебора неэффективен. С другой стороны, существует несколько методов, обеспечивающих для большинства задач близкую к

минимальной ширину ленты (полный объем памяти, необходимый для записи матрицы).

В методах перенумерации не учитываются численные значения элементов матрицы и принимается во внимание лишь структура матрицы. Для представления структуры матриц в форме, независимой от численных значений, и безотносительно к нумерации элементов матрицу коэффициентов обычно изображают графически. Так как каждый ненулевой элемент матрицы S_{ij} представляет прямую связь между переменными i и j , то матрицу можно изобразить совокупностью связей между переменными. В качестве примера на рис. 7.1

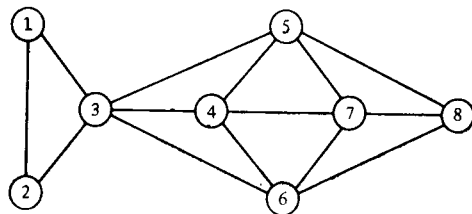


Рис. 7.1. Представление симметричной матрицы (формула (7.10)) в виде ненаправленного графа.

показано структурное представление матрицы (7.10). Переменные здесь показаны кружками, ненулевые элементы матрицы — линиями, соединяющими переменные.

Для треугольных элементов первого порядка такое графическое представление выглядит так же, как и сетка конечных элементов. Чтобы представление матрицы на рис. 7.1 было полным, нужно вдоль линий и около кружков проставить численные значения элементов. Здесь они были опущены, поскольку нас интересует исключительно структура матрицы. Однако, после того как значения элементов проставлены, номера переменных можно опустить, поскольку их нумерация произвольна.

В конкретных расчетах структура матрицы может быть представлена набором целочисленных пар $E = (i, j)$, каждая из которых означает пару переменных (т. е. номера строки и столбца) и каждая соответствует линии (хорде) графа. Полуширина матрицы M определяется при этом максимумом величины $i - j + 1$, взятой по всем E -элементам матрицы, т. е.

$$M = 1 + \max_E |i - j|. \quad (7.26)$$

Аналогично профиль (объем памяти, необходимый для профильной записи матрицы) определяется формулой

$$P = \sum_E (|i - j| + 1). \quad (7.27)$$

Хорошими нумерациями узлов, очевидно, будут те, которые минимизируют либо полуширину M , либо профиль P , в зависимости от того, какая форма записи предполагается. Нумерация, подходящая в одном случае, не обязательно будет удобной для другого, так как очень большие разности $|i - j|$ мало сказываются на профиле P , но являются катастрофическими для запоминающего устройства, хранящего

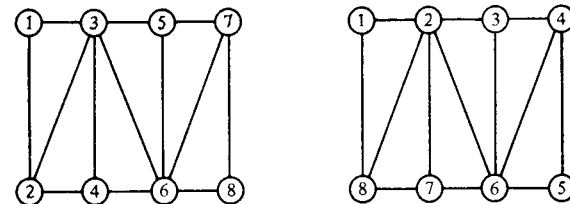


Рис. 7.2. Два возможных способа нумерации узлов (переменных), которые приводят к различной ширине матрицы.

ленточную матрицу. Тем не менее нумерация, обеспечивающая малую полуширину, в удивительно многих реальных случаях дает также и хорошие профили.

Многие методы нумерации узлов начинаются с классификации всех переменных по так называемым «уровням». Начальная переменная, скажем K , выбрана первой и отнесена к уровню $L(0)$. Далее, уровень $L(i)$ формируется всеми переменными, которые непосредственно связаны с переменными уровня $L(i-1)$, но которые не отнесены ни к одному из уровней $L(0), L(1), \dots, L(i-1)$. Каждая переменная может принадлежать только одному уровню. Например, начиная с переменной 1, получим следующие уровни для графа, показанного в левой части рис. 7.2:

$$\begin{aligned} L(0) &= [1], \\ L(1) &= [2 \ 3], \\ L(2) &= [4 \ 5 \ 6], \\ L(3) &= [7 \ 8]. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Итак, всего имеются четыре уровня, иными словами кратчайший путь между узлом 1 и наиболее удаленным узлом проходит через три связи. Действительно, всегда можно достичь узла на уровне $L(i)$, пройдя i связей от начального узла, поскольку $L(i)$ определено как набор узлов, непосредственно соединенных (на шаг назад) с узлами на уровне $L(i-1)$.

Число уровней зависит от выбора начального узла. Помещая узел 3 на нулевой уровень, для того же левого графа

на рис. 7.2 получаем следующую структуру:

$$\begin{aligned} L(0) &= [3], \\ L(1) &= [1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6], \\ L(2) &= [7 \ 8]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Как общее количество уровней, так и группировка переменных в пределах уровня зависят от выбора начального узла. Если после перебора всех возможных начальных узлов оказалось, что $L(K)$ — наиболее высокий уровень, то говорят, что такая матрица имеет топологический диаметр K .

7.7. Способы нумерации

Известно множество методов перенумерации. Однако нет ни одного метода, гарантирующего действительно оптимальную нумерацию, хотя ряд методов в большинстве случаев обеспечивает достаточное приближение к оптимуму. Эта область еще развивается и поэтому проводить здесь детальный обзор нецелесообразно. Тем не менее, поскольку все существующие методы основаны на исследовании графического представления структуры матрицы, можно изложить несколько общих принципов.

Для левого графа на рис. 7.2 нумерация лучше, чем для правого, потому что разности номеров переменных $|i - j|$ меньше. Соответственно ненулевые элементы матрицы группируются наиболее плотно около главной диагонали. При хорошей нумерации узлы с существенно разными номерами сильно разнесены. Такое разделение получается, если все узлы уровня $L(i)$ пронумерованы раньше, чем узлы уровня $L(i + 1)$. Другими словами, если начальный узел обозначен номером 1, то следующими должны быть пронумерованы члены уровня $L(1)$, затем — члены уровня $L(2)$ и так далее до последнего уровня. Хотя основной принцип достаточно прост, остается неясным, как выбрать начальный узел и как нумеровать члены в пределах данного уровня. Один из эффективных методов состоит в выборе начального узла с минимальным числом соединений. Структура уровней формируется далее, начиная с этого узла. Затем в пределах каждого уровня первыми нумеруют те члены, которые непосредственно соединены с наименьшими номерами следующего уровня. Разумным объяснением такого подхода является то, что чем больше задерживается нумерация отдельного узла или переменной, тем меньше разница индексов $|i - j|$ между ним и членами следующего уровня. Подобная нумерация означает, что подавляющее число соединяющих линий будет иметь малые разности $|i - j|$. Несмотря на то что это рассуждение

имеет вероятностный характер и не дает никаких гарантий относительно качества нумерации, оно хорошо оправдывает себя во многих реальных случаях.

Возвращаясь к рис. 7.2 и структуре уровней (7.28), видим, что узлы имеют следующие числа соединений с узлами более высокого уровня:

узел	1	2	3	4	5	6	7	8
уровень	0	1	1	2	2	2	3	3
соединения	2	1	3	0	1	2	0	0

Нетрудно убедиться, что нумерация левого графа на рис. 7.2 выполнена вышеизложенным методом.

Из формул (7.28) и (7.29) можно увидеть, что наилучшая нумерация получается при таком выборе начальной точки, который дает много уровней, каждый из которых содержит всего несколько узлов. Это наблюдение приводит к другой группе методов, в которых по структуре матрицы определяется ее топологический диаметр и у одного из концов истинного диаметра выбирается начальный узел. Несмотря на то что объем работы в этом случае существенно увеличивается за счет дополнительных операций по определению диаметра, дополнительные усилия такого рода обычно компенсируются уменьшением затрат на решение уравнений.

7.8 Краткий обзор литературы

Существует много хороших учебников по решению систем уравнений, которые могут быть полезны читателю, однако используемый в них общий подход не учитывает специфики матриц конечных элементов. Более подходящими оказываются учебники по методам конечных элементов в строительной и обычной механике, и, хотя конкретные задачи в них существенно отличаются от задач электромагнетизма, структура уравнений конечных элементов зачастую оказывается такой же. Особенно следует рекомендовать книгу Бейта и Уилсона [1], посвященную численным методам, применимым к конечным элементам.

Книга Айронса и Ахмада [2] не столь математизирована, но ориентирована на методы расчета и пути обхода подводных камней, основанные на практическом опыте.

Хуже представлены в учебной литературе в настоящее время многочисленные методы перенумерации, так что в этом вопросе надо ориентироваться на периодику. Одним из первых был предложен до сих пор сохраняющий популярность метод Катхилла и Макки [3]. За ним последовал похожий, но более эффективный алгоритм Гиббса, Пула и Стокмайера [4]. Очень экономичный метод, который, однако, еще не нашел широкого применения, предложен Джорджем и Лю [5].

ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ EQSOLV

```

C
C*****
C
C      SUBROUTINE EQSOLV
C*****
C
C      Решает систему уравнений для квадратной симметричной ма-
C      трицы коэффициентов S
C
C      S * POTENT = RTHDSD
C
C      Процедура представляет собой разложение Холецкого, после
C      которого выполняются прямое исключение и обратная подста-
C      новка. S и RTHDSD не сохраняются
C=====
C      COMMON-блок— общий для всех частей программы
C
C      LOGICAL CONSTR
C      DIMENSION X(50), Y(50), S(50,50)
C      DIMENSION CONSTR(50), RTHDSD(50), POTENT(50)
C      DIMENSION NVTX(3,75), SOURCE(75), SELM(3,3), TELM(3,3),
C      1      INTG(3)
C      COMMON INPUT, KONSOL, IERR, NVE, MAXNOD, MAXELM, NODES,
C      1      NELMTS, X, Y, NVTX, SOURCE, CONSTR, POTENT, RTHDSD,
C      2      SELM, TELM, S, INTG
C=====
C
C      Разложение Холецкого: замена S верхним и нижним треу-
C      гольными множителями
C
C      S(1,1) = SQRT(S(1,1))
C      S(2,1) = S(2,1) / S(1,1)
C      S(1,2) = S(2,1)
C      S(2,2) = SQRT(S(2,2) - S(2,1)**2)

```

```

C
C      DO 60 IROW = 3, NODES
C      IROW1 = IROW - 1
C      S(IROW,1) = S(IROW,1) / S(1,1)
C      S(1,IROW) = S(IROW,1)
C      DO 40 ICOL = 2, IROW1
C      ICOL1 = ICOL - 1
C      SUM = 0.
C      DO 30 K = 1, ICOL1
C      SUM = SUM + S(IROW,K) * S(ICOL,K)
C      30      CONTINUE
C      S(IROW,ICOL) = (S(IROW,ICOL) - SUM) / S(ICOL,ICOL)
C      S(ICOL,IROW) = S(IROW,ICOL)
C      40      CONTINUE
C      SUM = 0.
C      DO 50 K = 1, IROW1
C      SUM = SUM + S(IROW,K) * S(IROW,K)
C      50      S(IROW,IROW) = SQRT(S(IROW,IROW) - SUM)
C      60      CONTINUE
C
C      Прямое исключение. Происходит разрушение RTHDSD
C
C      RTHDSD(1) = RTHDSD(1) / S(1,1)
C
C      DO 130 IROW = 2, NODES
C      IROW1 = IROW - 1
C      SUM = 0.
C      DO 110 ICOL = 1, IROW1
C      110      SUM = SUM + S(IROW,ICOL) * RTHDSD(ICOL)
C      RTHDSD(IROW) = (RTHDSD(IROW) - SUM) / S(IROW,IROW)
C      130      CONTINUE
C
C      Обратная подстановка. Используется верхний треугольный множитель
C
C      POTENT(NODES) = RTHDSD(NODES) / S(NODES,NODES)
C      DO 230 K = 2, NODES
C      IROW = NODES + 1 - K
C      SUM = 0.
C      IROW1 = IROW + 1
C      DO 220 ICOL = IROW1, NODES
C      220      SUM = SUM + S(IROW,ICOL) * POTENT(ICOL)
C      POTENT(IROW) = (RTHDSD(IROW) - SUM) / S(IROW,IROW)
C      230      CONTINUE
C
C      300 RETURN
C      END

```

Некоторые формулы для треугольных элементов

Вычисления элементов матрицы, приведенные в гл. 3 и обобщенные в гл. 6 для трехмерной задачи, базируются на двух соотношениях: формуле интегрирования (3.33) и равенствах (3.28). Ниже приведен краткий вывод этих ключевых соотношений.

П.1. Интегрирование в однородных координатах

При построении матрицы для треугольных элементов необходимо вычислить определенный интеграл $I(i, j, k)$:

$$I(i, j, k) = \frac{1}{A} \int_{\Omega} \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k d\Omega. \quad (\text{П.1})$$

Эту задачу можно выполнить с помощью перехода к симплексным координатам интегрирования, когда элемент площади принимает вид

$$d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x, y)} dx dy. \quad (\text{П.2})$$

Так как переход от декартовых к симплексным координатам определяется соотношениями

$$\xi_1 = (1/2A)(a_1 + b_1 x + c_1 y), \quad (\text{П.3})$$

$$\xi_2 = (1/2A)(a_2 + b_2 x + c_2 y), \quad (\text{П.4})$$

где A — площадь треугольника, то вычисление якобиана не представляет сложности и приводит к выражению

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{(2A)^2} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{(2A)^2}. \quad (\text{П.5})$$

Следовательно, формулу (П.1) можно записать в виде двойного интеграла

$$I(i, j, k) = 2 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_1^i \xi_2^j (1 - \xi_1 - \xi_2)^k d\xi_2 d\xi_1. \quad (\text{П.6})$$

Интегрируя по частям, получим

$$I(i, j, k) = \frac{2k}{j+1} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_1^i \xi_2^{j+1} (1 - \xi_1 - \xi_2)^{k-1} d\xi_2 d\xi_1 \quad (\text{П.7})$$

и, следовательно,

$$I(i, j, k) = \frac{k}{j+1} I(i, j+1, k-1). \quad (\text{П.8})$$

Применяя дальнейшее интегрирование по частям, получим

$$I(i, j, k) = \frac{j!k!}{(j+k)!} I(i, j+k, 0), \quad (\text{П.9})$$

$$I(i, j, k) = \frac{i!j!k!}{(i+j+k)!} I(0, i+j+k, 0). \quad (\text{П.10})$$

В правой части формулы (П.10) интегрирование осуществляется лишь по одной симплексной координате. Выполняя элементарное интегрирование, находим в результате

$$I(i, j, k) = \frac{i!j!k!2!}{(i+j+k+2)!}, \quad (\text{П.11})$$

что и соответствует формуле (3.33).

Аналогичный метод применим для тетраэдра (см. гл. 6). Основное отличие состоит лишь в том, что интегрирование выполняется не с тремя, а с четырьмя симплексными координатами.

П.2. Тождество котангенсов

Равенства (3.28) можно получить с помощью несложных геометрических соотношений. Зададим треугольник, вписанный в прямоугольник, стороны которого параллельны осям

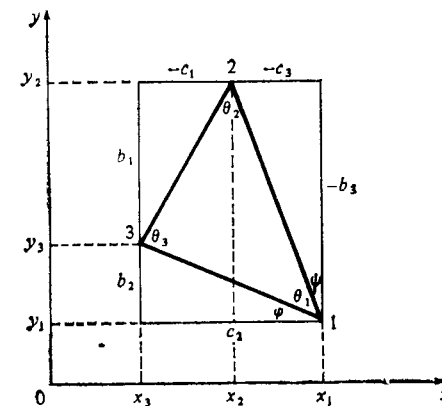


Рис. П.1. Геометрия треугольника произвольной формы, приведенного для доказательства тождества котангенсов, используемого в гл. 3.

декартовых координат, как показано на рис. П.1. Три вершины треугольника делят стороны прямоугольника на отрез-

ки, определяемые значениями

$$b_i = y_{i+1} - y_{i-1}, \quad (\text{П.12})$$

$$c_i = x_{i-1} - x_{i+1}. \quad (\text{П.13})$$

Эти соотношения совпадают с (3.26), (3.27). Из рис. П.1 видно, что

$$\text{ctg } \theta_1 = \text{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \psi \right). \quad (\text{П.14})$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\text{ctg } \theta_1 = \frac{\text{tg } \varphi + \text{tg } \psi}{1 - \text{tg } \varphi \text{tg } \psi}. \quad (\text{П.15})$$

Правую часть этого равенства можно выразить через длины отрезков

$$\text{ctg } \theta_1 = - \frac{b_2 b_3 + c_2 c_3}{c_3 b_2 - b_3 c_2}. \quad (\text{П.16})$$

Знаменатель данного выражения представляет собой удвоенную площадь треугольника

$$\text{ctg } \theta_1 = - \frac{b_2 b_3 + c_2 c_3}{2A}. \quad (\text{П.17})$$

Таким образом, получаем одну из формул (3.28), соответствующую $k=1$. Подобные результаты можно получить и для $k=2$ и $k=3$, либо изменяя нумерацию вершин, либо непосредственно для той же нумерации.

Второе равенство (3.28) определяется непосредственно сложением двух котангенсов, выражаемых через длины, как и в случае (П.16), и приведением подобных элементов.

Литература

К главе 1

1. Courant R. L., Variational method for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **49**, 1—23 (1943).
2. Duffin R. J., Distributed and lumped networks. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **8**, 793—826 (1959).
3. Norrie D. H., de Vries G., An introduction to finite element analysis, Academic Press, New York, 1978.
4. Owen D. R. J., Hinton E., A simple guide to finite elements. Pineridge Press, Swansea, 1980.
5. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K., Finite elements in the solution of field problems. *The Engineer*, **24**, 507—510 (1965).
6. Silvester P., Finite element solution of homogeneous waveguide problems. *Alta Frequenza*, **38**, 313—317 (1969).
7. Ahmed S., Daly P., Waveguide solutions by the finite element method. *Radio and Electronic Engineer*, **38**, 217—223 (1969).
8. Andersen O. W., Transformer leakage flux program based on finite element method. *Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Power Apparatus and Systems*, **PAS-92**, 682—689 (1973).
9. Carpenter C. J., Finite element network models and their application to eddycurrent problems. *Institution of Electrical Engineers Proceedings*, **122**, 455—462 (1975).
10. Demerdash N., Nehl T. W., Flexibility and economics of the finite element and difference techniques in nonlinear magnetic fields of power devices. *Institute of Electrical and Electronics Engineers. Transactions on Magnetics*, **MAG-12**, 1036—1038 (1976).
11. Daly P., Helps J. D., Direct method of obtaining capacitance from finite element matrices. *Electronics Letters*, **8**, 132—133 (1972).
12. Bird T. S., Evaluation of attenuation from lossless triangular finite element solutions for inhomogeneously filled guiding structures. *Electronics Letters*, **9**, 590—592 (1973).

К главе 2

1. Ramo S., Whinnery J. R., Van Duzer T., Fields & waves in communications electronics, Wiley, New York, 1965.
2. Riley K. F., Mathematical methods for the physical sciences, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
3. Morse P. N., Feshbach H., Methods of theoretical physics, vv. 1, 2, McGraw-Hill, New York, 1953. [Имеется перевод: Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики: В 2-х т.; Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1958.]
4. Schelkunoff S. A., Electromagnetic waves, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1943.
5. Meyer W. H., Neumann E. G., Physical and applied acoustics: an introduction, Academic Press, New York, 1972.
6. Ferrari R. L., An introduction to electromagnetic fields, Van Nostrand Reinhold, London, 1975.
7. Silvester P., Modern Electromagnetic fields, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.

8. Popović B. D., Introductory engineering electromagnetics. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.
9. Bleaney B. I., Bleaney B. Electricity and magnetism, 3rd ed., Clarendon, Oxford, 1976.
10. Sander K. F., Reed G. A. L., Transmission and propagation of electromagnetic waves, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
11. Hayt W. H., Engineering electromagnetics, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.
12. Stratton J. A., Electromagnetic theory, McGraw-Hill, New York, 1941. [Имеется перевод: Страттон Дж. А. Теория электромагнетизма: Пер. с англ. — М.: ГИТТЛ, 1948.]

К главе 3

1. Desai C. S., Abel J. F., Introduction to the finite element method. Van Nostrand, New York, 1972.
2. Silvester P., High-order polynomial triangular finite elements for potential problems, *International Journal of Engineering Science*, **7**, 849—861 (1969).
3. Silvester P., A general high-order finite element waveguide analysis program, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **MTT-21**, 538—542 (1969).
4. Kaper H. G., Leaf G. K., Lindeman A. J., The use of interpolatory polynomials for a finite element solution of the multigroup diffusion equation, *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Aziz A. K. (ed.), Academic Press, New York, 1972; *Transactions of the American Nuclear Society*, **15**, 298 (1972).
5. Kisak E., Silvester P., A finite element program package for magnetotelluric modelling, *Computer Physics Communications*, **10**, 421—433 (1975).
6. McAulay A. D., Track-guided radar for rapid transit headway control, *Journal of Aircraft*, **12**, 676—681 (1975).
7. Stone G. O., High-order finite elements for inhomogeneous acoustic guiding structures, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **MTT-21**, 538—542 (1973).
8. Andersen O. W., Transformer leakage flux program based on finite element method, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Power Apparatus and Systems*, **PAS-92**, 682—689 (1973).
9. Konrad A., Silvester P., Triangular finite elements for the generalized Bessel equation of order m , *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **7**, 43—55 (1973).
10. Silvester P., Construction of triangular finite element universal matrices, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **12**, 237—244 (1978).

К главе 4

1. Stratton J. A., Electromagnetic theory, McGraw-Hill, New York, 1941. [Имеется перевод: Страттон Дж. А. Теория электромагнетизма: Пер. с англ. — М.: ГИТТЛ, 1948.]
2. Riley K. F., Mathematical methods for the physical sciences, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
3. Newman M. J., Trowbridge C. W., Turner L. R., GFUN: an interactive program as an aid to magnet design, *Proceedings of the 4th International Conference on Magnet Technology*, Brookhaven, pp. 617—626, 1972.

4. Balanis C. A., Antenna theory, analysis and design, Harper and Row, New York, 1982.
5. Pocklington H. C., Electrical oscillations in wires, *Cambridge Phil. Soc. Proc.*, **9**, 324—332 (1897).
6. Harrington R. F., Field computation by moment methods, Macmillan, New York, 1968.
7. Silvester P., TEM properties of microstrip transmission lines, *Institution of Electrical Engineers Proceedings*, **115**, 43—48 (1968).
8. Benedek P., Silvester P., Capacitance of parallel rectangular plates separated by dielectric sheet, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **MTT-20**, 504—510 (1972).
9. Silvester P., Chan K. K., Bubnov — Galerkin solutions to wire-antenna problems, *Institution of Electrical Engineers Proceedings*, **119**, 1095—1099 (1972).
10. Hassan M. A., Silvester P., Radiation and scattering by wire antenna structures near a rectangular plate reflector, *Institution of Electrical Engineers Proceedings*, **124**, 429—435 (1977).
11. Chari M. V. K., Silvester P., Finite elements in electric and magnetic field problems, John Wiley, Chichester, 1980.

К главе 5

1. Oden J. T., Finite elements of nonlinear continua, McGraw-Hill, New York, 1972.
2. Finite elements for electrical and magnetic field problems, Chari M. V. K., Silvester P. (eds.), John Wiley, Chichester, 1981.
3. Chari M. V. K., Silvester P., Analysis of turboalternator magnetic fields by finite elements, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Power Apparatus and Systems*, **PAS-90**, 454—464 (1971).
4. Silvester P., Cabayan H., Browne B. T., Efficient techniques for finite element analysis of electric machines, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Power Apparatus and Systems*, **PAS-92**, 1274—1281 (1973).
5. Hanalla A. Y., MacDonald D. C., Sudden 3-phase short-circuit characteristics of turbine generators from design data using electromagnetic field calculations, *Institute of Electrical Engineers Proceedings*, **127**, C, 213—220 (1980).
6. Silvester P., Rafinejad P., Curvilinear finite elements for two-dimensional saturable magnetic fields, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Power Apparatus and Systems*, **PAS-93**, 1861—1870 (1974).
7. Barnes J. J., Lomax R. J., Finite element method in semiconductor device simulation, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Electron Devices*, **ED-24**, 1082—1089 (1977).
8. Buturla E. M., Cottrell P. E., Grossman B. M., Salsburg K. A., Finite element analysis of semiconductor devices: the FIELDAY program, *IBM Journal of Research and Development*, **25**, 218—231 (1981).
9. Tran T. M., Troyan F., Finite element calculation of the anomalous skin effect in a homogeneous unmagnetized cylindrical plasma column, *Computer Physics Communications*, **16**, 515—516 (1978).

К главе 6

1. Silvester P., Tetrahedral polynomial finite elements for the Helmholtz equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **4**, 405—413 (1972).

2. Simkin J., Trowbridge C. W., On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, 423—440 (1979).
3. Simkin J., Trowbridge C. W., Three-dimensional non-linear electromagnetic field computations, using scalar potentials, *Institution of Electrical Engineers Proceedings*, 127, part B, 368—374 (1980).
4. Zienkiewicz O. C., The finite element method, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977. [Имеется перевод: Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.]
5. Ferrari R. L., Maile G. L., Three-dimensional finite element method for solving electromagnetic problems, *Electronics Letters*, 14, 15, 467—468 (1978).
6. Ramo S., Whinnery J. R., Van Duzer T., Fields and waves in communications electronics, John Wiley, New York, 1965.
7. Collin R. E., Foundation of microwave engineering, McGraw-Hill, New York, 1966.
8. Sucher M., Fox J., Handbook of microwave measurements, vol. 1, Polytechnic Press, New York, 1963.
9. Hinken H. H., Conducting spheres in rectangular waveguides, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 28, 7, 711—714 (1980).
10. Norrie D. H., de Vries G., Introduction to finite element analysis, Academic Press, New York, 1978.
11. Desai D. S., Abel J. F., Introduction to the finite element method, Van Nostrand, New York, 1972.
12. Riley K. F., Mathematical methods for the physical sciences, Cambridge Univ. Press, 1974.

К главе 7

1. Bathe K.-J., Wilson E., Numerical methods in finite element analysis, McGraw-Hill, New York, 1980.
2. Irons B., Ahmad S., Techniques of finite elements. Ellis Horwood, Chichester, 1979.
3. Cuthill E., McKee J., Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices, *Proceedings of the 24th National Conference of the Association for Computing Machinery (ACM Publication P-69)*, pp. 157—172, Association for Computing Machinery, New York, 1969.
4. Gibbs N. E., Poole W. G., Stockmeyer P. K., An algorithm for reducing bandwidth and profile of a sparse matrix, *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Numerical Analysis*, 13, 2, 236—250 (1976).
5. George A., Liu J. W. H., A minimal storage implementation of the minimum degree algorithm, *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Numerical Analysis*, 17, 2, 282—299 (1980).

Дополнительная литература ¹⁾

1. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1974.
4. Розин Л. А. Метод конечных элементов в приложении к упругим системам. — М.: Стройиздат, 1977.

¹⁾ Составлено редактором перевода.

5. Деклу Ж. Применение метода конечных элементов: Пер. с франц. — М.: Мир, 1976.
6. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1979.
7. Метод конечных элементов: Учебное пособие для вузов/Под ред. П. М. Варвака. — Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981.
8. Глодмен Дж. Ф. Предвидимое влияние супер-ЭВМ на анализ структур методом конечных элементов — Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1984, т. 72, № 1, с. 97—103.

- Акустика
— задача 78
— резонатор 171
Алгоритм итерационный 133
Антенны
— радио 124
— цилиндрические 125
Аппроксимация 87
— коэффициенты 87, 88
— кусочно-постоянная 110
- Био — Савара закон 46, 119, 174
- Вариация функционала 4, 13, 118
Вектор намагниченности 119
Волиновод
— задачи 182, 188
— одиородный 72
— прямоугольный 97
— расчет 95
— свойства 73
Волны волновода
— поперечно-магнитные 74
— поперечно-электрические 74
— распространение 72, 182
- Галёркина метод 109, 178
Гаусса — Зайделя итерация 134
Гаусса треугольное разложение 199
Гельмгольца задача 76
Гельмгольца уравнение 49—53
Грина теорема 10, 20, 62
Грина функция 107
- Двигатель электрический
— — паз в роторе 63
— — постоянного тока 143
Дирихле граничные условия 8, 9, 18, 51—53, 64, 187
Дирихле матрицы 88
Дискретизация 96, 194, 195, 199
- Задача детерминированная 198
— магнитостатическая 86—89
— на собственные значения 198
— электромагнетизма 172—182
Запись ленточная 206
— профильная 207
- Исключение прямое 199
Итерация простая 133
- Кабель коаксиальный 66
— — неоднородности 66, 67
Конечные элементы 84
— построение 84—87
— минимизация 131, 132
— одномерные 108, 113, 118
— трехмерные 154, 156
Координаты декартовы 166, 169
— симплексные 83, 155
Коэффициент отражения 189
Кронекера символ 123
Кулона закон 46
Кулона условие 45
- Лагранжа полиномы 85
— — интерполяционные 85, 156
Лапласа задача 76—78
Лапласа оператор 103
Лапласа уравнения 9, 50
Линия передачи 8, 9, 17
— — высокочастотная 188
— — коаксиальная 59
— — микрополосковая 117
— — открытая 61
— — полосковая 61
— — расчет 117, 118
- Магнитостатика 118
— задачи 173—182
— уравнения 119
— — интегральные 119—123
Магниты подъемные 135
Материалы анизотропные 148
Матрицы
— вычисление 160
— глобальные 164
— Дирихле 14, 88
— коэффициенты 11, 12, 16, 201
— перестановка 94
— симметричные 210
— соотношение для тетраэдров 157
— структура 209
— треугольного элемента 89
— уравнения 164

- Микроскоп электронный 67
— линза 68
- Невязки взвешенные 179, 181
Нумерация 14, 15, 23, 209—213
Ньютона алгоритм 138, 142
Ньютона процесс 138, 139
- Оператор интегральный 117
— векторный 103
Остроградского — Гаусса теорема 42, 179
Ошибки 96, 102
— округления 102
- Пентаэдр 194, 195
Переименование переменных 23—25
Пластина диэлектрическая 115
Поверхность произвольная 61
Подпрограммы
— ELEM 29, 32
— ELMATE 29, 32
— EQSOLV 29, 203, 214, 215
— MESHIN 29, 34
— OUTPUT 29, 39
— SZERO 29
Подстановка обратная 199, 204, 205
Пойнтинга вектор 190
Поклингтона уравнения 125, 126
Полупространство диэлектрическое 114
Поле
— векторные функции 152
— магнитное 119, 129
— осесимметричное 98, 103
— — векторное 103
— — скалярное 98
— расчет 194
— резонатора 55—58
— статическое электрическое 106
Потенциалы
— вариации 10
— величины 16
— граничные условия 46, 47
— задачи 59, 66—71
— магнитные 18, 44
— — векторные 18, 44, 64—66
— — скалярные 46, 63, 64, 173, 175
— непрерывность 92
— нумерация 23, 24
— скалярные 9, 44, 45, 106—118
— электростатические 154
Поток
— линии 114, 115
— плотность 64, 65, 114, 181
— распределение 137, 144, 147
Потокоцепление 145, 146
Призма 165
- матричные уравнения 165—171
Программа TOSKA 182
Пуассона уравнение 18, 64, 79
- Разложение треугольное 199, 200, 203
Резонаторы акустические 171
— сверхвысокочастотные 183
- Сердечник соленоида 175
Симметрия осевая 67—71
Симплексы 83, 84
— интерполяция 84, 156
— координаты 82, 83, 155
Собственные значения 76, 172
— сравнение 173
Стокса теорема 48
Сфера металлическая 194
- Теория электромагнитных волн 40—48, 182
Тетраэдр 155
— вершины 155, 161
— выражения 185, 186
— второго порядка 161, 162
— координаты 155, 156
— матричные соотношения 157, 164
— скалярные элементы 154
— схемы нумерации 161, 162
Ток
— плотность 21, 129, 130
— смещения 42
— электрический 40, 41
Тождество котангенсов 217
Треугольник
— координаты 94
— разбиение 83
- Узлы 16
— интерполяции 85, 86
— значения 11
Уравнения
— двухпотенциальные 176
— интегральные 41, 42
— — намагниченности 119, 121
— — граничные условия 43
— — комплексная форма 42, 43
— — причины и следствия 44
— матричные 164—171
— непрерывности 41
— электростатики 106—118
Условия граничные 8, 18, 43, 164
— — естественные 51
— — основные 51, 185
— стационарности 157, 158
- Факторизация треугольная 200
Формулировка осесимметричная 98—101

- Фортран 28, 203
 Фредгольма уравнения 198
 Функция весовая 179—181
 — интерполяционная 12
 — кусочно-планарная 11
 — магнитного поля 129—132
 Функционал стационарный
 — — для потенциала 48
 — вычисление 192, 193
 Холесского программа разложения 202
 Цепи короткозамкнутые 191
 — разомкнутые 191
 Ширина ленты 206, 207
 Электромагнетизм
 — задачи 86—89
 — причины и следствия 44
 ЭВМ
 — блок COMMON 28, 203
 — время счета 141, 142, 203
 — память 199, 203, 204, 209
 — подпрограммы 28
 — программирование 25
 — хранение 199, 202, 207, 209
 Электростатика 106, 107, 108
 — уравнения 106—113
 Элементы
 — вычисления 216—218
 — матриц 23, 24
 — нулевые 205
 — объединение 13
 — первого порядка 11—13
 — — — тетраэдральные 185
 — — — треугольные 11—13
 — программирование 25
 — скалярные тетраэдральные 154
 — структуры данных 25
 — треугольные 11—13, 86—88, 140—141
 — — высшего порядка 89—97
 Энергия минимальная потенциальная
 — минимизация 16—18
 — поля 20
 — элемента 13
 Эрмита полиномы 142
 — — интерполяционные 142

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Треугольные элементы первого порядка для двумерных задач	7
1.1. Введение	7
1.2. Уравнение Лапласа	7
1.3. Элементы первого порядка	11
1.4. Объединение элементов	13
1.5. Решение задачи	15
1.6. Уравнение Пуассона	18
1.7. Моделирование источника	20
1.8. Практическая реализация граничных условий	23
1.9. Программирование и структура данных	25
1.10. Пример программы	28
1.11. Краткий обзор литературы	30
Глава 2. Представление электромагнитных полей	40
2.1. Уравнения Максвелла	40
2.1.1. Интегральные соотношения	41
2.1.2. Запись в комплексной форме	42
2.1.3. Граничные условия	43
2.1.4. Причина и следствие	44
2.2. Уравнения для потенциалов	44
2.2.1. Решения для запаздывающих потенциалов	45
2.2.2. Скалярный магнитный потенциал	46
2.2.3. Граничные условия для потенциалов	46
2.2.4. Физические интерпретации	47
2.3. Стационарные функционалы для потенциалов	48
2.3.1. Неоднородное уравнение Гельмгольца	49
2.3.2. Функционал для уравнения Гельмгольца	50
2.3.3. Функционалы для уравнений с другими потенциалами	54
2.4. Стационарные функционалы для полей	55
2.5. Формулировка задач для потенциалов в структурах с трансляционной симметрией	59
2.5.1. Коаксиальная линия передачи	59
2.5.2. Параллельная полосковая линия	61
2.5.3. Пара открытых линий	61
2.5.4. Задача для скалярного магнитного потенциала	63
2.5.5. Задача для векторного магнитного потенциала	64
2.5.6. Поле, создаваемое токонесущим проводником, находящимся в пазах ротора	65
2.6. Формулировка осесимметричных задач для потенциалов	66
2.6.1. Осесимметричная система с нелинейным магнитным материалом	67
2.7. Распространение волн в однородных волноводах	72
2.7.1. Основные дифференциальные уравнения для волноводных типов волн	73
2.7.2. Вариационная задача	75

2.8. Трехмерные скалярные задачи Лапласа и Гельмгольца . . .	76
2.8.1. Задачи акустики	78
2.9. Краткий обзор литературы	79
Глава 3. Треугольные элементы для скалярного уравнения Гельмгольца	81
3.1. Введение	81
3.2. Симплексные координаты	81
3.3. Интерполяция на симплексах	84
3.4. Плоские треугольные элементы	86
3.5. Матрицы для треугольных элементов высокого порядка	89
3.6. Использование треугольных элементов высоких порядков	93
3.7. Элементы высоких порядков для расчета волноводов	95
3.8. Осесимметричные скалярные поля	98
3.9. Решение задачи для коаксиальной линии	101
3.10. Осесимметричные векторные поля	103
3.11. Краткий обзор литературы	105
Глава 4. Конечные элементы для интегральных операторов	106
4.1. Введение	106
4.2. Одномерные конечные элементы для интегральных уравнений электростатики	108
4.2.1. Решение интегрального уравнения с помощью метода конечных элементов	109
4.2.2. Кусочно-постоянная аппроксимация	110
4.2.3. Коаксиальная линия прямоугольного поперечного сечения	113
4.3. Функция Грина для диэлектрической пластины	113
4.3.1. Диэлектрическое полупространство	114
4.3.2. Диэлектрическая пластина	115
4.3.3. Анализ микрополосковой линии	116
4.4. Вариационные выражения для интегральных операторов	117
4.5. Интегральные уравнения в магнитостатике	118
4.5.1. Интегральное уравнение для намагнитченности	119
4.5.2. Применение интегрального уравнения намагнитченности	121
4.6. Использование конечных элементов в теории антенн	124
4.6.1. Уравнение Поклингтона	125
4.6.2. Решение методом конечных элементов	126
4.7. Краткий обзор литературы	127
Глава 5. Дифференциальные операторы для ферромагнетиков	129
5.1. Функционалы для магнитных полей	129
5.2. Определение экстремума	131
5.3. Решение методом простой итерации	133
5.4. Расчет подъемного магнита	135
5.5. Итерационный процесс Ньютона	138
5.6. Треугольные элементы Ньютона первого порядка	140
5.7. Анализ электрической машины постоянного тока	143
5.8. Анизотропные материалы	148
5.9. Краткий обзор литературы	150
Глава 6. Трехмерные задачи	152
6.1. Введение	152
6.2. Тетраэдральные скалярные элементы	154
6.2.1. Трехмерные симплексные координаты	155
6.2.2. Интерполяционные полиномы	156
6.2.3. Матричные соотношения для отдельного тетраэдра	157
6.2.4. Вычисление матриц T и Q	160
6.2.5. Глобальные матричные уравнения	164

6.2.6. Матричные уравнения для прямоугольной призмы	165
6.2.7. Приложения к акустическому резонатору кубической формы	171
6.3. Трехмерные задачи магнитостатики	173
6.3.1. Уравнение для скалярного потенциала	173
6.3.2. Полный скалярный потенциал	175
6.3.3. Решение уравнений с двумя потенциалами	176
6.3.4. Решение методом Галёркина	178
6.4. Трехмерные задачи в теории распространения электромагнитных волн	182
6.4.1. Решение для магнитного поля H	184
6.4.2. Выражения для единичного тетраэдра	185
6.4.3. Построение глобальных матриц	187
6.4.4. Применение к волноводным задачам	188
6.4.5. Расчет S на основе функционала	192
6.4.6. Металлическая сфера в волноводе	194
6.5. Краткий обзор литературы	197
Глава 7. Численное решение уравнений метода конечных элементов	198
7.1. Введение	198
7.2. Треугольное разложение матриц	199
7.3. Программа разложения Холецкого	202
7.4. Время и память ЭВМ, необходимые для треугольного разложения	203
7.5. Ленточная и профильная формы записи матрицы	206
7.6. Структура матриц конечных элементов	209
7.7. Способы нумерации	212
7.8. Краткий обзор литературы	213
Приложение	216
Литература	219
Предметный указатель	224

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛИ

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

Монография

Питер Сильвестер, Рональд Феррари

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАДИОИНЖЕНЕРОВ
И ИНЖЕНЕРОВ-ЭЛЕКТРИКОВ

Старший научный редактор А. Ю. Кирий
Младший научный редактор Л. В. Тарасова
Художник В. В. Дулько
Художественный редактор Н. М. Иванов
Технический редактор Л. П. Бирюкова
Корректор С. А. Денникова

ИБ № 5613

Сдано в набор 14.11.85. Подписано к печати 14.05.86.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага кн.-журн. нмл. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 7,25 бум. л. Усл. печ. л. 14,50. Уч.-изд. л. 12,80. Усл. кр.-отт. 14,63. Изд. № 7/4319. Тираж 9 300 экз. Зак. 795. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Мир», 129820, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Издательство «Мир»
предполагает выпустить в 1987 г. книгу:
Бреббия К., Вроубел Л., Теллес Х.,
МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Монография известных специалистов из Бразилии и Великобритании, посвященная изложению методов граничных элементов и применению их в практических инженерных задачах механического поведения конструкций, течений вязкой жидкости, распространения тепла, диффузии. Рассматриваются как стационарные, так и нестационарные задачи.

Книга предназначена для специалистов в области механики и термодинамики деформируемых сред, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.